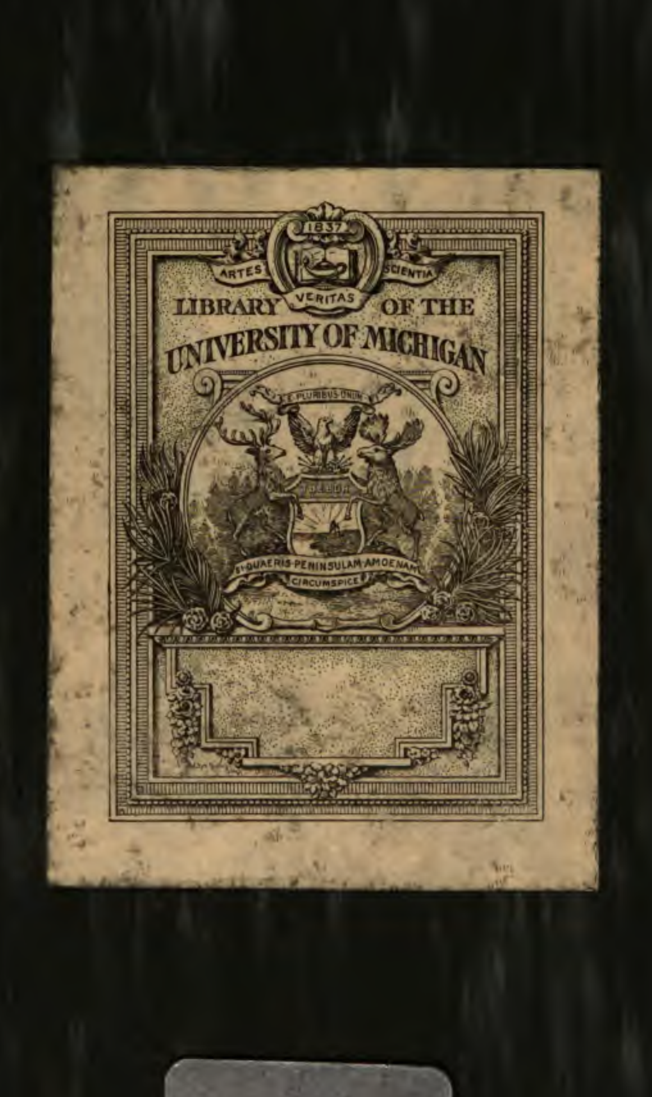

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE

IV

ROBERTO BONOLA

PROFESSOR AN DER SCUOLA NORMALE ZU PAVIA

DIE NICHTEUKLIDISCHE GEOMETRIE

HISTORISCH-KRITISCHE DARSTELLUNG IHRER ENTWICKLUNG

AUTORISIERTE DEUTSCHE AUSGABE

BESORGT VON

PROF. DR. HEINRICH LIEBMANN

MIT 76 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1908

Vorrede des Verfassers.

Der Stoff, der zur Zeit über den Ursprung und die Entwicklung der *nichteuklidischen Geometrie* gesammelt ist, und das Interesse, das die historisch-kritischen Auseinandersetzungen der Grundlagen der wissenschaftlichen Disziplinen gewonnen haben, hat mich veranlaßt, die Grenzen des ersten Teiles meines Artikels: „Sulla teoria delle parallele e sulle geometri non-euclidee" zu erweitern, der vor etwa sechs Jahren in den „Questioni riguardanti la geometria elementare" gesammelt und redigiert von Prof. E. Enriques erschienen ist.

Der für die deutsche Übersetzung dieses Werkes[1]) gänzlich umgearbeitete Artikel behandelt hauptsächlich den systematischen Teil des Themas; dieses Buch dagegen ist einer breiteren Auseinandersetzung der Geschichte der Parallelen und der geschichtlichen Entwicklung der Geometrien von Lobatschefskij-Bolyai und Riemann gewidmet.

Im ersten Kapitel, das von Euklid und den ältesten Erklärern des *V. Postulats* ausgeht, habe ich die bezeichnendsten Erwägungen wiedergegeben, mit denen die Griechen, die Araber und die Mathematiker der Renaissance die Theorie der Parallelen auf eine festere Grundlage zu stellen behaupteten. Im zweiten Kapitel suchte ich hauptsächlich an den Werken von Saccheri, Lambert und Legendre den Übergang von den alten zu den neuen Ideen zu beleuchten, die am Anfang des XIX. Jahrhunderts entstanden; im dritten und vierten Kapitel habe ich durch die Untersuchungen von Gauß, Schweikart,

1) Von der deutschen Übersetzung ist der hier in Betracht kommende erste Teil noch nicht erschienen.

Taurinus und der systematischen Werke von Lobatschefskij und Bolyai die Grundlagen des ersten geometrischen Lehrgebäudes erläutert, das auf der Ablehnung der V. Hypothese Euklids begründet ist. Im fünften Kapitel habe ich synthetisch die spätere Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie entworfen, die aus den Forschungen von Riemann und Helmholtz über die Beschaffenheit des Raumes erwuchs und aus der projektiven Erweiterung von Cayleys *projektiver Maßbestimmung*.

Im ganzen Verlauf der Darstellung habe ich mich bemüht, die verschiedenen Punkte nach ihrer geschichtlichen Folge wiederzugeben: wenn mich aber diese Anordnung zu weit von der beabsichtigten Einfachheit der Darstellung abseits geführt haben sollte, so habe ich sie gern geopfert, um dem Buch einen streng elementaren Charakter zu erhalten.

Unter den vielen mit dem V. euklidischen gleichberechtigten Postulaten, von denen die wichtigsten am Ende des vierten Kapitels gesammelt sind, befindet sich eines *statischer* Natur, das, durch Beobachtungen bestätigt, eine empirische Grundlage der Parallelentheorie liefern könnte. Hieraus ergibt sich ein wichtiges Band zwischen *Geometrie* und *Statik* [Genocchi], dem der erste der Anhänge gewidmet ist, mit denen das Buch schließt, da ich keinen geeigneten Platz dafür in den vorhergehenden Kapiteln gefunden habe.

Der zweite Anhang bezieht sich auf einen nicht weniger interessanten Gegenstand. Die Untersuchungen von Gauß, Lobatschefskij und Bolyai über die Theorie der Parallelen haben ihren Ursprung in der Ausdehnung eines grundlegenden Begriffs der klassischen Geometrie. Aber ein Begriff kann gewöhnlich in verschiedenen Richtungen erweitert werden.

In unserem Fall wurde der Begriff des gewöhnlichen Parallelismus, der sich auf die Hypothese einander nichtschneidender, in derselben Ebene] gelegener und gleichabständiger Geraden stützt, von den vorgenannten Geometern erweitert, indem sie das *V. Postulat* Euklids [Gleichabständigkeit] fallen ließen, und in der Folge von Clifford, der die Hypothese der Lage in derselben Ebene aufgab.

Von den Cliffordschen Parallelen, die zuerst mit projektiver Methode [Clifford-Klein], dann mit Hilfe der Differentialgeometrie [Bianchi, Fubini] untersucht worden sind, fehlte bisher eine elementare Behandlung: Anhang II ist zum größten Teil der elementar-synthetischen Entwicklung der einfachsten und elegantesten Eigenschaften gewidmet, die ihnen zukommen. Der Anhang endet mit einem kurzen Abriß des Clifford-Kleinschen Problems, das sich geschichtlich an die Cliffordsche Parallelentheorie schließt, das sich zum Ziel setzt, die geometrische Struktur des Raumes zu charakterisieren auf Grund des beschränktesten Systems von Postulaten, die mit den Ergebnissen der Beobachtung und dem Prinzip der Homogenität des Raumes verträglich sind.

Dies ist in aller Kürze der Inhalt des Buches.

Bevor ich das bescheidene Werk dem Urteil der wohlwollenden Leser unterbreite, fühle ich lebhaft die Pflicht, meinem verehrten Lehrer, Professor Federigo Enriques, zu danken für die wertvollen Ratschläge, mit denen er mich hinsichtlich der Anordnung und des kritischen Teils des Stoffes unterstützt hat; ferner Herrn Prof. Conrado Segre, der in liebenswürdiger Weise mir das Manuskript eines *Vorlesungskurses* über nichteuklidische Geometrie zur Verfügung gestellt hat, das von ihm vor etwa drei Jahren an der Universität Turin diktiert wurde; meinem lieben Freund Professor Giovanni Vailati für die wertvollen Angaben über die griechische Geometrie und für die mir bei der Durchsicht der Korrekturen geleistete Hilfe.

Endlich fühle ich mich auch dem trefflichen Verleger Cesare Zanichelli, der mein Werk sofort in seine Sammlung wissenschaftlicher Werke aufgenommen hat, zu größtem Dank verpflichtet.

Pavia, im März 1906.

Roberto Bonola.

Das Werk des italienischen Verfassers schien mir durch seine zugleich *historische* und *systematische* Entwicklung der nichteuklidischen, besser gesagt, der absoluten, von dem fünften Postulat unabhängigen Geometrie eine Lücke in der Literatur auszufüllen, und so bin ich gern auf eine Aufforderung des Verlegers eingegangen, nachdem der Herr Verfasser und der italienische Verleger sich einverstanden erklärt hatten, eine deutsche Übersetzung anzufertigen. Die kleinen Änderungen, welche sie dem Original gegenüber aufweist, bestehen hauptsächlich darin, daß Gauß (S. 70 ff.) und Saccheri (S. 38 ff.) selber mehr zu Worte gekommen sind, als im Original, und daß Anhang III über die nichteuklidische Parallelenkonstruktion hinzugefügt ist, als Gegenstück zu der synthetischen Theorie der Cliffordschen Parallelen in Anhang I (Anhang I und II sind hier umgestellt im Vergleich zum Original).

Über das Ziel hat sich der Verfasser klar ausgesprochen; es ist vielleicht nützlich noch hervorzuheben, daß eine systematische Entwicklung der Prinzipien der Geometrie (vgl. den inzwischen erschienenen Artikel III A, B, 1 der Math. Encyklopädie von F. Enriques) nicht beabsichtigt ist.

Zum Schlusse möchte ich meinem Freunde Bonola für seine Vorschläge und seine Mitarbeit bei Zusätzen in der deutschen Ausgabe danken, ferner dem italienischen Verleger, der die Figuren des Originals zur Verfügung stellte, und der Firma B. G. Teubner, welche die Übersetzung würdig ausgestattet hat.

Leipzig, im Dezember 1907.

Heinrich Liebmann.

Inhalt.



Fünftes Kapitel.

Die weitere Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie.

Erstes Kapitel.

Die Beweise des V. euklidischen Postulats.

Das Postulat der Parallelen bei den griechischen Geometern.

§ 1. Euklid [ca. 330—275 v. Chr.] nennt zwei in einer Ebene gelegene Gerade Parallele, wenn sie, verlängert, einander nicht treffen [Def. XXIII] [1]). Er beweist [Prop. XXVII, XXVIII], daß zwei Gerade, die mit einer ihrer Transversalen gleiche innere Wechselwinkel oder gleiche korrespondierende Winkel oder auf derselben Seite innere Winkel bilden, die einander zu zwei Rechten ergänzen, parallel sind. Um dann die Umkehrungen dieser Sätze zu beweisen, bedient sich Euklid des folgenden Postulats [V]:

Wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, deren Summe kleiner ist als zwei Rechte, so treffen sich die beiden Geraden, wenn man sie auf dieser Seite verlängert.

Die euklidische Parallelentheorie wird dann vervollständigt durch die folgenden Lehrsätze:

Gerade Linien, die zu ein und derselben Geraden parallel sind, sind untereinander parallel [Prop. XXX].

Durch einen gegebenen Punkt kann man eine ein-

1) Bei Angaben des euklidischen Textes werden wir uns immer an die kritische Ausgabe von J. L. Heiberg [Leipzig, Teubner, 1883] halten.

zige Gerade ziehen, die zu einer gegebenen Geraden parallel ist [Prop. XXXI].

Geradenabschnitte, die zwischen gleichen und parallelen Geradenabschnitten liegen, sind gleich und parallel [Prop. XXXII].

Aus dem letzten Satz wird die Äquidistanz von zwei Parallelen abgeleitet. Zu den wichtigsten Folgerungen aus dieser Theorie gehört der bekannte Lehrsatz von der Winkelsumme im Dreieck und die Eigenschaften der ähnlichen Figuren.

§ 2. Schon die ältesten Erklärer des euklidischen Textes meinten, daß das V. Postulat nicht hinreichend selbstverständlich sei, um es ohne Beweis hinzunehmen, weshalb sie versuchten, es als Folgerung aus anderen Sätzen abzuleiten. Um diesen Zweck zu erreichen, ersetzten sie manchmal die euklidische Definition der Parallelen, die grammatisch von negativer Form ist, durch andere Definitionen, welche nicht diese für fehlerhaft gehaltene Form haben.

Proclus [410—485] überliefert uns in seiner Erklärung zum ersten Buch Euklids[1]) wertvolle Nachrichten über die ersten in dieser Hinsicht gemachten Versuche. Er berichtet z. B., daß Posidonius [im I. Jahrh. v. Chr.] vorgeschlagen hatte, zwei Gerade in einer Ebene parallel zu nennen, wenn sie gleichen Abstand haben. Diese Definition und die von Euklid entsprechen also zwei Tatsachen, die sich getrennt vorfinden können, und Proclus [S. 177] führt, wobei er auf eine Abhandlung von Geminos [I. Jahrh. v. Chr.] verweist, in dieser Beziehung die Beispiele der Hyperbel

1) Was den Text des Proclus betrifft, so werden wir uns immer an die von G. Friedlein besorgte Ausgabe halten: *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarii* [Leipzig, Teubner, 1873].

und der Conchoïde an und ihr Verhalten in bezug auf die entsprechenden Asymptoten, um zu zeigen, daß Linien im euklidischen Sinne parallel sein können, d. h., daß diese Linien ins Unendliche verlängert, einander nicht treffen, und trotzdem nicht parallel im Sinne von Posidonius, d. h. nicht äquidistant.

Diese Tatsache wird von Geminus — immer nach Angabe des Proclus — als die widersinnigste [παραδοξότατον] der ganzen Geometrie bezeichnet.

Will man nun die euklidische Definition mit der des Posidonius in Einklang bringen, so muß man notwendig beweisen, daß zwei Geraden in einer Ebene, die einander nicht treffen, gleichen Abstand haben; oder, daß der Ort der Punkte, die gleichen Abstand von einer Geraden haben, eine Gerade ist. Für diesen Beweis benützt Euklid als Stütze sein Postulat.

Weiter lehnt Proclus [S. 364] ab, es unter die Forderungen zu rechnen; er erwähnt zur Unterstützung dieser seiner Ansicht die Tatsache, daß seine Umkehrung [„Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist kleiner als zwei Rechte"] ein von Euklid bewiesener Lehrsatz ist [Prop. XVII], und es schien ihm unmöglich, daß ein Satz, dessen Umkehrung beweisbar ist, seinerseits unbeweisbar sein sollte.

Er warnt auch vor mißbräuchlichen Berufungen auf die Selbstverständlichkeit und besteht auf der Möglichkeit, daß es asymptotische Gerade geben kann [p. 191—192].

Ptolemäus [II. Jahrh. n. Chr.], immer nach Angabe des Proclus [p. 362—365], suchte die Frage mit folgender seltsamen Erwägung zu lösen.

Seien (Fig. 1) AB, CD zwei Parallelen, FG eine Transversale, α und β die beiden inneren Winkel zur Linken von FG und α' und β' die beiden inneren Winkel zur Rechten. Dies festgesetzt, wird die Summe

$\alpha + \beta$ entweder größer oder kleiner oder gleich zwei Rechten sein. Man „gibt zu", daß, wenn für ein Paar von Parallelen z. B. der erste Fall

$$[\alpha + \beta > 2 \text{ Rechte}]$$

gilt, er gleichfalls eintritt für jedes andere Paar. Da weiter die Geraden *FB*, *GD* einander parallel sind, weil die Geraden *FA*, *GC* parallel sind, so folgt aus:

Fig. 1.

$$\alpha + \beta > 2 \text{ Rechte}: \ \alpha' + \beta' > 2 \text{ Rechte}.$$

Es würde folgen $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 4$ Rechte, was offenbar widersinnig ist. Demnach kann nicht $\alpha + \beta > 2$ Rechte sein. In derselben Art beweist man, daß nicht

$$\alpha + \beta < 2 \text{ Rechte}$$

sein kann, also muß $\alpha + \beta = 2$ Rechte sein (Proclus p. 365).

Aus diesem Ergebnis entnimmt man leicht das euklidische Postulat.

§ 3. Nachdem Proclus [p. 371] die Betrachtung des Ptolemäus beurteilt hat, sucht er dasselbe Ziel auf anderem Wege zu erreichen. Der Beweis des Proclus beruht auf folgendem Satz, den er als selbstverständlich annimmt. Der Abstand zwischen zwei auf zwei einander schneidenden Geraden gelegenen Punkten kann beliebig groß gemacht werden, wenn man die beiden Geraden hinreichend verlängert.[1] Hieraus leitet er den Hilfssatz ab:

---

1) Dieser als selbstverständlich angenommene Satz wird von

Eine Gerade, die eine von zwei Parallelen trifft, trifft notwendig auch die andere.

Hier ist der Beweis, den Proclus für den Hilfssatz gibt: Seien (Fig. 2) AB, CD zwei Parallele und EG eine Transversale, die in F die erste trifft. Der Abstand

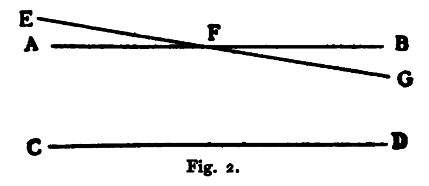


Fig. 2.

eines veränderlichen Punktes auf dem Strahl FG von der Geraden AB wächst über alle Grenzen, wenn der Punkt sich unbegrenzt von F entfernt; und da der Abstand von zwei Parallelen endlich ist, so wird die Gerade EG die Gerade CD notwendig treffen müssen.

Proclus führte also die Annahme ein, daß der Abstand von zwei Parallelen endlich bleibt, eine Annahme, aus der logisch die des Euklid folgt.

§ 4. Daß das Postulat des Euklid Gegenstand von Diskussionen und Untersuchungen bei den Griechen war, ergibt sich auch aus der folgenden widersinnigen Betrachtung, mit der man, nach Angabe des Proclus [p. 369], zu beweisen vorgab, daß zwei von einer dritten geschnittene Gerade sich nicht treffen, auch wenn die Summe der inneren Winkel auf derselben Seite kleiner ist als zwei rechte Winkel.

Sei (Fig. 3) AC eine Transversale der beiden Geraden AB, CD und E der Mittelpunkt von AC. Auf derjenigen Seite von AC, wo die Summe der inneren

---

Proclus mit der Autorität des Aristoteles gestützt. Vgl.: „De Coelo", I, 5. Ein strenger Beweis des genannten Satzes wurde vom Pater G. Saccheri gegeben in dem S. 24 angeführten Werk.

Winkel kleiner ist als zwei Rechte, werden auf *AB* und *CD* die Abschnitte *AF* und *CG* gleich *AE* abgetragen. Die beiden Geraden *AB* und *CD* können sich nicht treffen zwischen den Punkten *AF* und *CG*, weil im Dreieck jede Seite kleiner ist als die Summe der beiden anderen.

Nachdem man dann die Punkte *F*, *G* verbunden hat, wiederhole man von *FG* an die vorhergehende Konstruktion, d. h. man bestimme auf *AB* und *CD* die beiden Abschnitte *FK* und *GL*, beide gleich der Hälfte von *FG*. Die beiden Geraden *AB*, *CD* werden sich nicht zwischen den Punkten *F*, *K* und *G*, *L* treffen können. Und da dieses Verfahren unbeschränkt wiederholt werden kann, wollte man schließen, daß die beiden Geraden *AB*, *CD* sich niemals treffen.

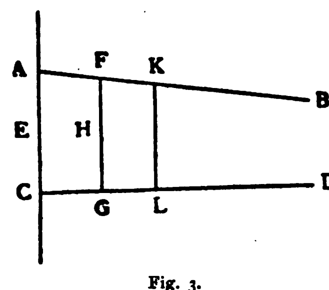


Fig. 3.

Der Grundfehler der Betrachtung beruht auf dem Gebrauch des Unendlichen, da doch die Abschnitte *AF*, *FK* durch fortwährende Abnahme nach Null streben könnten, während ihre Summe endlich ist. Der Erfinder dieses Widerspruchs hat von demselben Grundsatz Gebrauch gemacht, mit dem Zeno [495—435 v. Chr.] zu beweisen behauptete, daß Achilles die Schildkröte nicht erreichen würde, auch wenn er sich mit doppelt so großer Geschwindigkeit als sie bewegte.

Dies ist unter anderer Form Proclus bekannt [p. 369—370], wenn er nämlich sagt, daß so nur bewiesen wird, daß man mit dem angegebenen Verfahren den Schnittpunkt nicht erreichen [bestimmen: ὁρίζειν] kann, nicht, daß er nicht vorhanden ist.

Proclus bemerkt überdies, daß, „da die Summe von zwei Winkeln im Dreieck kleiner ist als zwei Rechte [Euklid. XVII], es Gerade gibt, die von einer dritten geschnitten sich auf der Seite treffen, wo die Summe der inneren Winkel kleiner ist als zwei Rechte; man kann also dem, der behauptet, daß für jeden Unterschied zwischen genannter Summe und zwei rechten Winkeln die beiden Geraden sich nicht treffen, antworten, daß bei kleineren Unterschieden die Geraden sich treffen".

„Aber wenn es für irgend welche Paare von Geraden, die mit einer dritten auf derselben Seite innere Winkel bilden, deren Summe kleiner ist als zwei Rechte, einen Schnittpunkt gibt, so muß noch nachgesehen werden, ob dies für alle Paare eintritt. Alsdann könne man feststellen, daß es einen bestimmten Unterschied [von zwei rechten Winkeln] gibt, für den sie [die Geraden] sich nicht treffen, während sich dagegen alle andern treffen, für die dieser Unterschied größer sei" [Proclus, p. 371]. Aus dem Folgenden wird sich ergeben, daß die hier von Proclus aufgeworfene Frage nur in dem Fall berechtigt ist, wo der Abschnitt AC der Transversale unverändert bleibt [Fig. 3], während die beiden Geraden des Paares bei der Drehung um die Punkte A und C ihren Winkelunterschied ändern.

§ 5. Ein anderer sehr alter Beweis des V. Postulats, der im arabischen Kommentar des Al-Nirizi[1]) [IX. Jahrh.] wiedergegeben ist, und zu uns auch durch die lateinische Übersetzung des Gherardo da Cre-

1) Cf. R. O. Besthorn u. J. L. Heiberg „*Codex Leidensis* 399, 1. *Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadsch cum commentariis Al-Narizii*" [Copenhague, F. Hegel, 1893—97].

mona[1]) [XII. Jahrh.] gelangt ist, wird Aganis[2]) zugeschrieben.

Der Teil dieses Kommentars, der sich auf die Definitionen, Postulate und Axiome bezieht, enthält häufige Verweise auf den Namen Sambelichius, der leicht zu identifizieren ist mit Simplicius, dem berühmten Erklärer des Aristoteles, der im VI. Jahrhundert lebte. Simplicius habe also eine Einführung geschrieben zum I. Buch des Euklid, worin er Gedanken aussprach ähnlich denen des Geminus und Posidonius, indem er behauptete, daß das V. Postulat nicht selbstverständlich ist, und den Beweis seines Genossen Aganis wiedergab.

Dieser Beweis wird gegründet auf die Annahme, daß es äquidistante Gerade gibt, Gerade, die Aganis wie schon Posidonius Parallele nennt. Aus dieser Annahme leitet er ab, daß der kleinste Abstand von zwei Parallelen eine Strecke senkrecht zu beiden Geraden ist; daß zwei Gerade, die zu einer dritten senkrecht sind, untereinander parallel sind; daß zwei Parallele, die von einer dritten geschnitten werden, auf derselben Seite innere Winkel bilden, welche sich zu zwei Rechten ergänzen und umgekehrt.

Diese Sätze sind so einfach abzuleiten, daß wir über die Beweise des Aganis nicht zu berichten brauchen. Nachdem wir erwähnt haben, daß aus ihnen die Sätze XXX und XXXII bei Euklid folgen [cf. p. 1], wollen

---

1) Cf. M. Curtze: „*Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii*". Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata [Leipzig, Teubner, 1899].

2) In bezug auf Aganis ist wohl zu beachten, daß er von Curtze und Heiberg mit Geminus identifiziert wird. P. Tannery dagegen verwirft diese Identifizierung. Cf. Tannery: „*Le philosophe Aganis est-il identique a Geminus?*" Bibliotheca Math. (3), t. 2, p. 9—11 [1901].

wir angeben, wie Aganis den Schnittpunkt von zwei nicht äquidistanten Geraden konstruiert.

Seien (Fig. 4) AB, GD zwei Gerade, die von der Transversale EZ geschnitten werden, so daß die Summe der inneren Winkel AEZ und EZD kleiner ist als zwei Rechte. Ohne irgend etwas von der Allgemeinheit der Figur aufzuheben, kann man voraussetzen, daß $\sphericalangle AEZ$ ein Rechter ist.

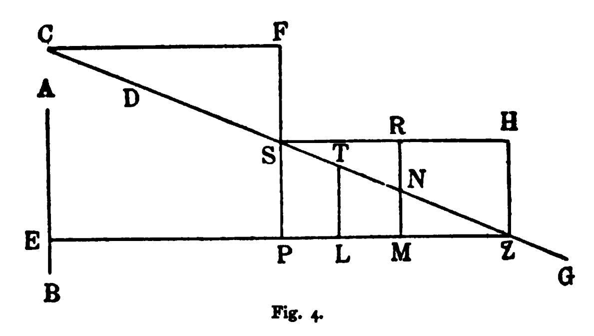


Fig. 4.

Man nehme dann auf ZD einen willkürlichen Punkt T an, von dem aus man TL senkrecht zu ZE zieht; dann teile man, durch den Punkt P, den Abschnitt EZ in zwei gleiche Teile, sodann, durch den Punkt M, den Abschnitt MZ in zwei gleiche Teile usw., bis einer der Mittelpunkte $P, M \ldots$ auf den Abschnitt LZ fällt. Wenn dies z. B. der Punkt M ist, so ziehe man in M die Gerade senkrecht zu EZ, die ZD in N treffen wird. Man konstruiere schließlich auf ZD den Abschnitt ZC, der von ZN das gleiche Vielfache ist, wie ZE von ZM. In unserem Fall ist $ZC = 4 \cdot ZN$. Der so erhaltene Punkt C ist der Schnittpunkt der beiden Geraden AB und GD.

Um das zu zeigen, müßte man beweisen, daß die aufeinanderfolgenden gleichen Abschnitte ZN, $NS \ldots$ der Geraden ZD gleiche Projektionen auf ZE haben.

Wir werden nicht bei diesem Umstand verweilen, weil wir darauf später zurückkommen müssen [p. 11]. Übrigens wird der Beweis durch die Figur des Aganis selbst nahe gelegt.

Enthüllen wir das Charakteristische der vorhergehenden Konstruktion: sie beruht (implizite) auf dem Gebrauch des sogenannten Archimedischen Postulates, das notwendig ist zur Bestimmung des Segments MZ, eines Bruchteils von EZ, der zugleich kleiner ist als LZ.

Das Parallelenpostulat bei den Arabern.

§ 6. Die Araber, die Nachfolger der Griechen in der mathematischen Vorherrschaft, beschäftigten sich wie diese mit dem V. Postulat. Einige aber übernahmen ohne weiteres die Gedanken und die Beweise ihrer Meister, wie z. B. Al-Nirizi [IX. Jahrh.], dessen Erklärung zu den Definitionen, Postulaten und Axiomen des I. Buches der Einführung zu den „Elementen" nachgebildet ist, die wir Simplicius verdanken und dessen Beweis der V. Euklidischen Annahme der oben [§ 5] erwähnte des Aganis ist.

Andere trugen ihren persönlichen Anteil bei zu der Frage. Nasîr-Eddîn [1201—1274] z. B. bewies zwar das V. Postulat, indem er das von Aganis befolgte Kriterium benützt, verdient aber doch erwähnt zu werden wegen der originellen Fassung, daß er ausdrücklich den Lehrsatz über die Summe der Winkel eines Dreiecks vorausschickt, und wegen der erschöpfenden Form seiner Beweisführung.[1])

---

1) Vgl. „*Euclidis elementorum libri XII studii Nassiredini*" [Rom 1594]. Dieses in arabischer Sprache geschriebene Werk wurde nachgedruckt 1657, 1801. Es gibt keine Übersetzung in eine andere Sprache.

Folgendes ist der Hauptteil der Annahme, die er macht: Wenn von zwei Geraden r und s die eine senkrecht, die andere schräg steht zur Strecke AB, so sind die Abschnitte der von s auf r gefällten Lote kleiner als AB auf der Seite, wo AB mit s einen spitzen Winkel bildet, und größer auf der Seite, wo AB mit s einen stumpfen Winkel bildet. Es folgt unmittelbar, daß, wenn zwei gleiche Abschnitte AB, $A'B'$ auf dieselbe Seite fallen und senkrecht zur Geraden BB' sind, die Gerade AA' ihrerseits auf den gegebenen Abschnitten senkrecht stehen wird. Überdies wird man haben: $AA' = BB'$, will sagen, die Figur $AA'B'B$ ist ein Viereck mit rechten Winkeln und gleichen gegenüberliegenden Seiten, d. h. ein Rechteck.

Aus diesem Ergebnis entnimmt Nasîr-Eddîn leicht, daß die Summe der Winkel im Dreieck zwei Rechten gleich ist. Für das rechtwinklige Dreieck ist die Sache offenkundig, da es die Hälfte eines Rechtecks ist; für ein beliebiges Dreieck erhält man das Ergebnis durch Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke.

Dies angenommen zeigen wir hier kurz, wie der arabische Geometer das euklidische Postulat beweist [vgl. Aganis].

Seien (Fig. 5) AB, CD zwei Strahlen, der eine schräg, der andere senkrecht zur Geraden AC. Auf AB nehme man den Abschnitt AH an, und von H fälle man das Lot HH' auf AC. Wenn der Punkt H' in C fällt oder auf die Seite, welche A gegenüberliegt hinsichtich C, treffen sich die beiden Strahlen AB, CD ohne weiteres. Wenn sodann H' zwischen A und C fällt, ziehe man die Strecke AL senkrecht zu AC und gleich HH'. Dann wird

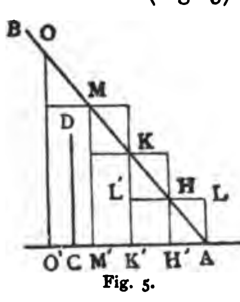


Fig. 5.

nach dem oben Gesagten sein: $HL = AH'$. Anschließend an AH nehme man HK gleich AH und von K fälle man das Lot KK' auf AC. Da KK' größer als HH' ist, bilde man $L'K' = H'H$ und man verbinde H mit L'. Da die beiden Vierecke $K'H'HL'$, $H'ALH$ alle beide Rechtecke sind, so liegen die drei Punkte L', H, L in gerader Linie. Es folgt: $\sphericalangle L'HK = \sphericalangle AHL$ und folglich die Gleichheit der beiden Dreiecke AHL, $HL'K$. Daher: $L'H = HL$ und wegen der Eigenschaft der Rechtecke: $K'H' = H'A$.

Man nehme jetzt KM gleich mit und anschließend an HK, und von M fälle man MM' senkrecht auf AC. Durch eine der eben entwickelten gleiche Beweisführung zeigt man:

$$M'K' = K'H' = H'A.$$

Nachdem dies erste Ergebnis erhalten ist, nehme man ein Vielfaches von AH', das größer ist als AC (Postulat des Archimedes). Es sei z. B.

$$AO' = 4 \cdot AH' > AC.$$

Dann konstruiere man auf AB die Strecke $AO = 4 \cdot AH$ und von O fälle man das Lot auf AC. Dieses Lot wird offenbar OO' sein. Dann wird im rechtwinkligen Dreieck $AO'O$ die Gerade CD, die senkrecht steht auf der Kathete $O'A$, da sie die andere Kathete nicht treffen kann, notwendig die Hypotenuse OA treffen. Hierdurch ist erwiesen, daß zwei Gerade AB und CD, von denen die eine senkrecht, die andere schräg steht zur Transversale AC, einander treffen. Mit anderen Worten, das euklidische Postulat ist für den Fall bewiesen, wo einer der inneren Winkel ein rechter ist. Nasîr-Eddîn macht dann Gebrauch vom Lehrsatz über die Winkelsumme im Dreieck und führt so den allgemeinen Fall auf diesen besonderen zurück. Wir wollen die

Beweisführung nicht wiedergeben, weil wir im folgenden über eine gleiche berichten werden müssen.[1])

Das Parallelenpostulat während der Renaissance und des [redacted] Jahrhunderts.

§ 7. Sowohl die ersten Übersetzungen der „Elemente", die im XII. und XIII. Jahrhundert nach den arabischen Texten gemacht sind, als die späteren, die nach den griechischen Texten am Ende des XV. und in der ersten Hälfte des XVI. zusammengestellt sind, geben im allgemeinen keine kritische Anmerkung zum V. Postulat. Die Kritik entsteht neu nach 1550, besonders durch Anstoß des Kommentars von Proclus.[2]) Um sie besser verfolgen zu können, führen wir kurz die Ansichten der angesehensten Erklärer im XVI. und XVII. Jahrhundert an.

F. Commandino [1509—1575] fügt in die euklidische Definition der Parallelen ohne Rechtfertigung den Begriff der Äquidistanz ein; hinsichtlich des V. Postulats gibt er die Ansicht und den Beweis des Proclus wieder.[3])

---

1) Der Beweis des Nasîr-Eddîn für das V. Postulat wird von dem englischen Geometer J. Wallis ausführlich im zweiten Band seiner Werke wiedergegeben (vgl. die Anmerkung S. 17) und auch von G. Castillon in einer Schrift, die in den *„Mém. de l'Académie Royale de Sciences et Belles-lettres"* in Berlin T. XVIII, p. 175—183 [1788—1789] veröffentlicht ist. Außer ihnen erwähnen den Beweis mehrere andere Schriftsteller, von denen wir hauptsächlich nennen wollen G. S. Klügel (vgl. Anm. (2), S. 46), J. Hoffmann [Kritik der Parallelentheorie, Jena 1807], V. Flauti [*Nuova dimostrazione del postulato quinto*, Napoli 1818].

2) Der Kommentar des Proclus wurde zum erstenmal in Basel [1533] im Urtext gedruckt, dann in Padua [1560] in der lateinischen Übersetzung von Barozzi.

3) *Elementorum libri XV* [Pesaro 1572].

C. Clavio [1537—1612] gibt in seiner lateinischen Übersetzung des euklidischen Textes[1]) die Kritik und den Beweis des Proclus wieder. Er trägt dann einen neuen Beweis der euklidischen Annahme vor, der sich auf den Lehrsatz stützt: „Die Linie gleichen Abstands von einer Geraden ist eine Gerade", den er durch analoge Beweisführung zu rechtfertigen sucht. Der Beweis des Clavius hat viel Berührungspunkte mit dem des Nasîr-Eddîn.

P. A. Cataldi [?—1626] ist der erste moderne Geometer, der eine ausschließlich der Parallelenfrage gewidmete Arbeit veröffentlicht hat.[2]) Cataldi geht vom Begriff der äquidistanten und nichtäquidistanten Geraden aus, aber um die wirkliche Existenz von äquidistanten Geraden zu beweisen, geht er zurück auf die Annahme, „daß nicht äquidistante Gerade in einer Richtung sich nähern und nach der anderen auseinandergehen" [vgl. Nasîr-Eddîn].[3])

G. A. Borelli [1608—1679] nimmt bei dem Versuch es zu rechtfertigen das folgende Axiom an [XIV]: „Wenn eine Strecke seitwärts in derselben Ebene so einer anderen Gerade entlang hinbewegt wird, daß sie diese immer mit dem einen Endpunkt berührt und während ihrer ganzen Bewegung auf ihr senkrecht steht, so wird ihr anderer Endpunkt bei ihrer Bewegung eine gerade Linie beschreiben."

Er beweist in der Folge, daß zwei zu einer dritten senkrechte Gerade äquidistant sind, und erklärt die Par-

---

1) *Euclidis elementorum libri* XV [Rom 1574].

2) „*Operetta delle linee rette equidistanti, et non equidistanti*" [Bologna 1603].

3) Weitere Bemerkungen über den Gegenstand wurden gemacht von Cataldi in „*Aggiunta all' operetta delle linee rette equidistanti et non equidistanti*" [Bologna 1604].

allelen als äquidistante Gerade. Es folgt die Theorie der Parallelen.[1])

§ 8. Giordano Vitale [1633—1711], der wieder anknüpft an den von Posidonius aufgestellten Begriff der Äquidistanz, erkennt mit Proclus die Notwendigkeit, zu widerlegen, daß die Parallelen Euklids ein asymptotisches Verhalten zeigen können. Zu diesem Zweck definiert er als parallel zwei äquidistante Gerade, und sucht zu beweisen, daß der Ort der von einer Geraden äquidistanten Punkte eine Gerade ist.[2])

Der Beweis beruht wesentlich auf diesem Hilfssatz: Wenn zwischen den auf irgend einer Kurve, deren Hohlseite gegen H liegt, angenommenen Punkten A, C die Gerade AC gezogen wird, und wenn von den unendlich vielen Punkten des Bogens AC Lote auf eine Gerade gefällt werden, so behaupte ich, es sei unmöglich, daß diese Lote untereinander gleich sind.

Die „eine Gerade", von der in dem Satz die Rede ist, ist nicht eine beliebige Gerade der Ebene, sondern eine in folgender Weise konstruierte Gerade (Fig. 6): Vom Punkte B des Bogens AC fälle man BD senkrecht auf die Sehne AC; dann errichte man AG in A ebenfalls senkrecht zu AC; endlich nehme man zwei gleiche Abschnitte AG und DF auf den konstruierten Loten und verbinde die Endpunkte G, F. GF ist die Gerade, welche Giordano

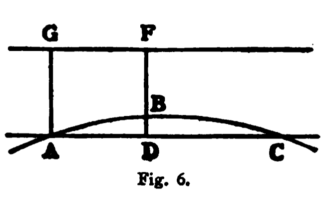


Fig. 6.

1) Borelli: „*Euclides restitutus*" [Pisa 1658].

2) Giordano Vitale: *Euclide restituto overo gli antichi elementi geometrici ristaurati, e facilitati. Libri XV.* [Roma 1680.]

bei seinem Beweis betrachtet; eine Gerade, in bezug auf die der Bogen AB sicher keine äquidistante Linie ist.

Aber wo der Verfasser beweisen will, daß der Ort der von einer Geraden gleich weit abstehenden Punkte auch eine Gerade ist, wendet er den vorstehenden Hilfssatz auf eine Figur an, in der die Beziehungen nicht verwirklicht sind, die zwischen dem Bogen ABC und der Geraden GF bestehen, weshalb die Folgerungen, die er über die Existenz äquidistanter Geraden zieht, in der Tat nicht erlaubt sind.

In dieser Hinsicht bildet der Beweis des Giordano keinen Fortschritt gegen die früheren; ferner enthält er einen sehr bekannten Satz, dessen Bedeutung in der Folge zu weiterer Entwicklung gelangen wird.

Es sei (Fig. 7) $ABCD$ ein Viereck mit den rechten Winkeln A und B und mit den gleichen Seiten AD und BC; es sei überdies HK ein Lot, das von einem Punkt H der Strecke DC auf die Grundlinie AB des Vierecks gefällt ist. Giordano beweist: 1. Daß die Winkel D, C gleich sind, 2. daß, wofern die Strecke HK der Strecke AD gleich ist, die zwei Winkel D, C rechte sind und CD äquidistant zu AB ist.

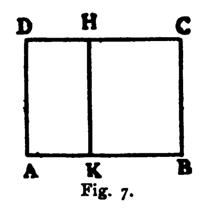


Fig. 7.

Mit diesem Lehrsatz führt Giordano die Frage der äquidistanten Geraden darauf zurück, die Existenz eines Punktes H auf DC zu beweisen, dessen Abstand von AB den beiden Strecken AD, CB gleich ist. Dies erscheint uns als eines der bemerkenswertesten Ergebnisse, das bis zu jenem Zeitpunkt über die Parallelenlehre erhalten worden ist.[1])

1) Vgl. Bonola: „*Un teorema di Giordano Vitale da Bitonto sulle rette equidistanti*“, Bollettino di Bibliografia et Storia delle Scienze Mat. [1905].

§ 9. J. Wallis [1616—1703] gab den Begriff der Äquidistanz auf, der ohne Erfolg von den vorausgehenden Geometern ausgebeutet war, und gab einen neuen Beweis des V. Postulats, der sich gründet auf den allgemeinen Satz: Zu jeder Figur gibt es eine ähnliche von willkürlicher Größe. Hier geben wir schnell an, wie Wallis verfährt.[1])

Es seien (Fig. 8) a, b zwei Gerade, die in A und B von der Transversale c geschnitten werden; α, β seien die inneren Winkel auf derselben Seite von c, wobei $\alpha + \beta$ kleiner ist als zwei rechte Winkel. Zieht man durch A die Gerade b', so daß b und b' mit c gleiche korrespondierende Winkel einschließen, so ist klar, daß b' in den Nebenwinkel von α fallen wird. Verschieben wir dann die Gerade b stetig, so daß B die Strecke AB durchläuft und daß der Winkel, den sie mit c bildet, beständig gleich β bleibt, so muß die Gerade b, bevor sie die Endlage b' erreicht, notwendig a treffen. So wird ein Dreieck AB_1C_1 bestimmt mit den Winkeln in A und B, die entsprechend gleich α und β sind. Aber nach der Annahme des Wallis über die Existenz ähnlicher

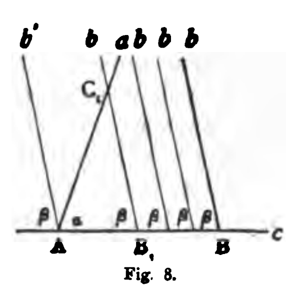


Fig. 8.

1) Vgl. Wallis: „*De Postulato Quinto; et Definisione Quinta, Lib. 6. Euclidis; disceptatio geometrica*"; in den Opera Math. t. II. p. 669—678 [Oxford 1693]. Diese Schrift von Wallis enthält zwei Vorlesungen, die er an der Universität Oxford hielt, die eine 1651, die andere 1663. Darin wird auch der Beweis des Nasîr-Eddîn wiedergegeben. Der Teil, der den Beweis des Wallis betrifft, wurde ins Deutsche übersetzt von den Herren Engel und Stäckel in der Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, S. 21—36 [Leipzig, Teubner 1895]. Dies Werk wird im folgenden angeführt als: Th. d. P.

Figuren kann über AB als der AB_1 entsprechenden Seite ein Dreieck ABC ähnlich dem Dreieck AB_1C_1 konstruiert werden, was zeigt, daß die Geraden a, b in einem Punkt zusammentreffen müssen, nämlich in der dritten Ecke C des Dreiecks ABC. Also usw.

Wallis sucht dann seine besondere Ansicht zu rechtfertigen, indem er bemerkt, daß Euklid, wenn er die Existenz eines Kreises von gegebenem Mittelpunkt und gegebenem Halbmesser fordert [III. Postulat], in Wirklichkeit das Prinzip der Ähnlichkeit für die Kreise fordert. Aber so sehr auch die Anschauung diese Ansicht in günstigem Sinne unterstützt, so bildet doch der Begriff der Gestalt einer Figur unabhängig von der Ausdehnung eine Annahme, die keineswegs selbstverständlicher ist, als jenes euklidische Postulat.

Wir erwähnen noch, daß Wallis einfacher die Existenz von Dreiecken mit gleichen Winkeln hätte annehmen können oder, wie wir in der Folge sehen werden, von nur zwei verschiedenen Dreiecken mit entsprechend gleichen Winkeln [vgl. S. 31 Anmerk. 1].

§ 10. Die kritische Arbeit der vorgehenden Geometer genügt, die geschichtliche Entwicklung unserer Frage im XVI. und XVII. Jahrhundert ins Licht zu setzen, weshalb wir für überflüssig halten, von andern bedeutenden Forschern zu sprechen, wie z. B. Oliviero di Bury [1604], Luca Valerio [1613], H. Savile [1621], A. Taquet [1654], A. Arnauld [1667] waren.[1]) Wir erachten es vielmehr für nötig, einige Worte über die Stelle zu sagen, welche die euklidische Annahme im geometrischen Organismus bei den verschiedenen Erklärern der „Elemente" einnimmt.

1) Über den vorliegenden Gegenstand vgl. man: Riccardi *„Saggio di una bibliografia Euclidea"*. Mem. di Bologna, serie 5, T. 1, p. 27—34 [1890].

In der lateinischen Ausgabe der „Elemente“ [1482], die nach arabischen Texten von Campanus ausgeführt wurde [XIII. Jahrhundert], wird die fragliche Annahme unter die Postulate eingereiht. Gleiches wäre zu sagen von der aus dem Griechischen ins Lateinische gemachten Übersetzung von B. Zamberti [1505], von den Ausgaben von Luca Paciolo [1509], von N. Tartaglia [1543], von F. Commandino [1572], von A. Borelli [1658].

Dagegen enthält der erste Druck der „Elemente“ in griechischer Sprache [Basel 1533] die Annahme unter den Axiomen [Axiom XI]. In der Folge rechnen sie unter die Axiome F. Candalla [1556], C. Clavio [1574], Giordano Vitale [1680] und auch Gregory [1703] in seiner klassischen lateinischen Übersetzung der Werke des Euklid.

Um zu versuchen, sich Rechenschaft zu geben über diese Verschiedenheiten, die mehr als auf die eben genannten Autoren zurückgehen auf die von den Griechen überlieferten Handschriften, wird es gut sein zu wissen, welche Bedeutung die letzteren den Wörtern „Postulate“ [αἰτήματα] und „Axiome“ [ἀξιώματα] zuerteilt haben.[1]) Bemerken wir vor allem, daß das Wort Axiome hier steht, um das zu bezeichnen, was Euklid in seinem Text „Gemeinbegriffe“ nennt [κοιναὶ ἔννοιαι].

Bei Proclus sind drei verschiedene Arten der Erklärung des Unterschieds zwischen Axiomen und Postulaten angegeben.

1) Über das Folgende vgl. Proclus, im Kapitel, das die Überschrift „*Petita et axiomata*“ trägt. Neuerdings hat G. Vailati in einem seiner Vorträge auf dem dritten Mathematikerkongreß [Heidelberg 1904] die Aufmerksamkeit der Gelehrten wieder auf die Bedeutung dieser Wörter bei den Griechen gelenkt. Vgl.: „*Intorno al significato della distinzione tragli assiomi ed i postulati nella geometria greca*“. Verh. des dritten Math.-Kongresses, p. 575—581 [Leipzig, Teubner, 1905].

Die erste Art knüpft an den Unterschied, der zwischen Aufgabe und Lehrsatz besteht. Das Postulat unterscheidet sich vom Axiom wie die Aufgabe sich vom Lehrsatz unterscheidet, sagt Proclus. Darunter muß man verstehen, daß das Postulat die Möglichkeit einer Konstruktion bejaht.

Die zweite Art besteht in der Aussage, daß das Postulat ein Satz geometrischen Inhalts ist, während das Axiom ein Satz zugleich geometrischen und arithmetischen Inhalts ist.

Die dritte Art endlich, den Unterschied beider Worte zu verstehen, die Proclus anführt, wird auf die Autorität des Aristoteles [382—322] gestützt. Die Wörter Axiom und Postulat erscheinen bei Aristoteles nicht in ausschließlich mathematischem Sinne gebraucht. Axiom ist das, was an sich selbst wahr ist, kraft der Bedeutung der Werte, die es enthält, Postulat ist das, was zwar ohne Axiom sein, im oben erklärten Sinn, doch ohne Beweis gilt.

Solchermaßen wird also das Wort Axiom, wie noch besser aus einem von Aristoteles gebrachten Beispiel hervorgeht [zieht man Gleiches von Gleichem ab, so sind die Reste gleich], in einem Sinn gebraucht, der fast genau dem der Gemeinbegriffe des Euklid entspricht, während das Wort Postulat bei Aristoteles eine von den beiden oben angeführten verschiedene Bedeutung hat.[1])

---

1) Vgl. Aristoteles: *Analytica Posteriora*, I, 10, § 8. Wir wollen diese ein wenig dunkle Stelle, wo der Philosoph vom Postulat spricht, vollständig anführen: Ὅσα μὲν οὖν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας, ταῦτα ἐὰν μὲν δοκοῦντα λαμβάνῃ τῷ μανθάνοντι ὑποτίθεται. Καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπόθεσις ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνον μόνον. Ἐὰν δὲ ἢ μηδεμίας ἐνούσης δόξης ἢ καὶ ἐναντίως ἐνούσης λαμβάνῃ, τὸ αὐτὸ αἰτεῖται. Καὶ τούτῳ διαφέρει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα, ἔστι γὰρ αἴτημα τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ.

Je nachdem man nun die eine oder die andere dieser Unterscheidungen zwischen den beiden Wörtern annimmt, wird ein bestimmter Satz unter den Postulaten oder unter den Axiomen eingereiht werden können. Nimmt man die erste an, so würden unter den fünf euklidischen Postulaten nach Proclus nur die drei ersten diesen Namen verdienen, insofern nur in ihnen gefordert wird, eine Konstruktion machen zu können [zwei Punkte zu verbinden, eine Gerade zu verlängern, einen Kreis von willkürlichem Mittelpunkt und Halbmesser zu beschreiben]. Das IV. [die rechten Winkel sind gleich] und das V. müßten statt dessen in die Axiome eingereiht werden.[1])

Nimmt man dagegen die zweite oder die dritte

---

1) Es ist angebracht zu bemerken, daß das V. Postulat auch so ausgesprochen werden kann: Man kann den gemeinsamen Punkt zweier Geraden konstruieren, wenn diese Geraden von einer Transversale geschnitten auf derselben Seite zwei innere Winkel bilden, deren Summe kleiner ist als zwei Rechte. Daraus geht hervor, daß es wie die drei ersten die Möglichkeit einer Konstruktion behauptet. Dieser Charakter verschwindet übrigens vollständig, wenn man es z. B. so ausspricht: durch einen Punkt geht eine einzige Parallele zu einer Geraden, oder: zwei Geraden, die zu einer dritten parallel sind, sind untereinander parallel. Demnach könnte es scheinen, daß die oben erwähnte Unterscheidung nur formal ist. Man darf sich aber durch den Anschein nicht täuschen lassen. Das V. Postulat erlaubt, wie es auch ausgesprochen wird, in Wirklichkeit den Schnittpunkt aller Geraden eines Büschels, ausgenommen einer einzigen mit einer bestimmten Geraden der Ebene des Büschels zu konstruieren. Freilich besteht zwischen diesem Postulat und den drei Postulaten der Konstruktion ein bestimmter Unterschied: in jenen sind die gegebenen Stücke vollkommen unabhängig, in diesem sind die gegebenen Stücke (die beiden von der Transversale geschnittenen Geraden) einer Bedingung unterworfen. Also mehr als zu den Postulaten oder zu den Axiomen gehört die euklidische Annahme zu einer dritten Zwischenart zwischen diesen beiden.



Unterscheidung an, so sind die euklidischen Postulate alle fünf unter den Postulaten aufzuzählen.

Dadurch ist der Ursprung der Abweichung zwischen den verschiedenen Handschriften leicht erklärlich. Zur Bekräftigung dieser Erklärung können wir hinzufügen, in welcher Unsicherheit sich die Historiker befinden, wenn sie Euklid die Postulate, die Gemeinbegriffe und die Definitionen des ersten Buches zuerteilen. Was die Postulate anbetrifft, so erheben sich die stärksten Zweifel gegen die beiden letzten: die Anwesenheit der ersten drei stimmt hinreichend mit dem ganzen Plan des Werkes.[1])

Läßt man, selbst gegen die Autorität des Geminus und Proclus, die Annahme zu, daß das IV. und V. Postulat nicht von Euklid sind, so mußte doch die äußerste Strenge der „Elemente“ die späteren Geometer dazu führen, im Schoß des Werkes alle ohne Beweis angenommenen Sätze zu suchen. Nun findet sich der, der uns interessiert, in sehr gedrängter Form ausgesprochen im Beweis des Satzes XXIX. Hieraus konnte also der Inhalt des V. Postulats entnommen und zu den Postulaten der Konstruktion oder zu den Axiomen gefügt werden, je nach der Meinung des Abschreibers des Werkes von Euklid.

Sein natürlicher Platz wäre übrigens, auch nach der Meinung von Gregory, nach dem Satz XVII, dessen Umkehrung es ausspricht.

Wir bemerken schließlich, daß, in welcher Weise man auch die oben aufgeworfene Wortfrage löst, die moderne Philosophie der Mathematik im allgemeinen dazu neigt, den Unterschied zwischen Postulat und Axiom, wie er bei der zweiten und dritten oben erwähnten Er-

1) Vgl. P. Tannery: „*Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide*“. — Bull. Sciences Math. (2) t. XVIV, p. 162—175 [1884].

klärungsart angestrebt ist, zu unterdrücken, weil die Ansicht überwiegt, den Grundsätzen der Geometrie den Charakter von Annahmen zu geben, welche auf die Grundlage der Erfahrung gestützt sind, während es überflüssig erscheint, einen Unterschied zu machen zwischen diesen Sätzen und den Behauptungen, die einfache Folgerungen der gegebenen Erklärungen sind.

Zweites Kapitel.

Die Vorläufer der nichteuklidischen Geometrie.

Gerolamo Saccheri [1667—1733].

§ 11. Das Werk des Paters Gerolamo Saccheri: „*Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia*“ [Mailand 1733], ist zum größten Teil dem Beweis des V. Postulats gewidmet. Der Leitgedanke der Untersuchungen des Saccheri findet sich in seiner „*Logica demonstrativa*“ [Torino 1697] und besteht vor allem in einer besonderen Schlußweise, die schon von Euklid gebraucht wurde [Lib. IX, Prop. XII], nämlich, „auch unter der Voraussetzung der Annahme, daß der Satz falsch ist, den man beweisen will, gelangt man gleichwohl zu dem Schluß, daß er wahr ist“.[1])

Diesem Gedanken sich anpassend, nimmt der Verfasser als gegeben an die ersten 26 Sätze bei Euklid und die Annahme der Falschheit des V. Postulats, und sucht unter den Folgerungen aus dieser Annahme irgend einen Satz, der ihn berechtigt, die Wahrheit des Postulats selbst zu bejahen.

Bevor wir die Arbeit Saccheris erläutern, erinnern wir daran, daß Euklid, um seinen 16. Satz zu beweisen

---

1) Vgl. G. Vailati: „*Di un' opera dimenticata del P. Gerolamo Saccheri*“, Rivista Filosofica [1903].

[Der Außenwinkel im Dreieck ist größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel], versteckt annimmt, daß die Gerade unendlich ist, indem seine Beweisführung wesentlich beruht auf der Existenz einer Strecke, die doppelt so groß ist wie eine gegebene Strecke.

Über die Möglichkeit, diese Annahme fallen zu lassen, werden wir in der Folge sprechen: für jetzt bemerken wir, daß Saccheri sie stillschweigend annimmt, denn er macht im Verlauf seines Werkes Gebrauch vom Satz vom Außenwinkel.

Bemerken wir schließlich, daß er sich auch auf das Postulat des Archimedes stützt und auf die Annahme der Stetigkeit der Geraden[1]), um auf alle Figuren eines gegebenen Typus gewisse Sätze auszudehnen, die als richtig nur für eine Figur von diesem Typus bewiesen sind.

§ 12. Die Grundfigur des Saccheri ist das zweirechtwinklige gleichschenklige Viereck, d. h. das Viereck mit zwei gegenüberliegenden gleichen auf der Grundlinie senkrechten Seiten. Die Eigenschaften dieser Figur leiten sich aus folgendem leicht zu beweisendem ersten Hilfssatz ab:

Wenn im Viereck $ABCD$ mit aufeinanderfolgenden rechten Winkeln A, B die Seiten AD und BC gleich sind, dann ist auch der Winkel C dem Winkel D gleich [Satz I] und wenn die Seiten AD und BC ungleich sind, so ist von den beiden Winkeln C und D der größere der, welcher der kleineren Seite anliegt und umgekehrt.

---

1) Diese Hypothese wird von Saccheri in ihrer anschaulichen Form gebraucht, nämlich: eine Strecke, die stetig von der Länge a zur Länge b übergeht, die von a verschieden ist, nimmt während der Änderung jede beliebige zwischen a und b enthaltene Länge an.



Es sei jetzt (Fig. 9) $ABCD$ ein zweirechtwinkliges

$$[A = B = 1 \text{ Rechter}]$$

und gleichschenkliges $[AD = BC]$ Viereck: bei der euklidischen Annahme sind auch die Winkel C, D rechte, so daß durch die Annahme, daß diese Winkel alle beide stumpf oder spitz sein können, das V. Postulat stillschweigend verneint wird. Saccheri erörtert genau die drei Annahmen hinsichtlich der Winkel C, D, die er entsprechend benannte: Hypothese des rechten Winkels $[C = D = 1 \text{ Rechter}]$, Hypothese des stumpfen Winkels

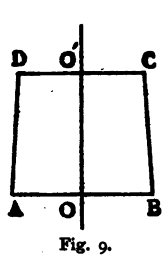


Fig. 9.

$$[C = D > 1 \text{ Rechter}],$$

Hypothese des spitzen Winkels

$$[C = D < 1 \text{ Rechter}].$$

Ein erstes bemerkenswertes Ergebnis ist das folgende: Je nachdem im zweirechtwinkligen gleichseitigen Viereck $ABCD$ die Hypothese des rechten, die des stumpfen oder die des spitzen Winkels verwirklicht ist, hat man entsprechend $AB = CD$, $AB > CD$, $AB < CD$ [Satz III]. In der Tat, bei der Hypothese des rechten Winkels wird aus dem vorhergehenden Hilfssatz sofort abgeleitet $AB = CD$. Bei der Hypothese des stumpfen Winkels teilt das Lot OO' auf der Mitte der Strecke AB das Hauptviereck in zwei gleiche und in O und O' rechtwinklige Vierecke. Da dann $D > A$, so ist nach dem genannten Hilfssatz $AO > DO'$, daher $AB > CD$. Bei der Hypothese des spitzen Winkels ändern diese Ungleichheiten den Sinn, daher $AB < CD$. Der bewiesene Lehrsatz wird umgekehrt, indem man per absurdum schließt [Satz IV].

Wenn in einem einzigen Fall die Hypothese

des rechten Winkels richtig ist, so ist sie in jedem andern Fall richtig [Satz V].

Es sei (Fig. 10) im zweirechtwinkligen gleichseitigen Viereck *ABCD* die Hypothese des rechten Winkels verwirklicht. Nimmt man auf *AD* und *BC* die Punkte *H* und *K* in gleichem Abstand von *AB*, so entsteht das Viereck *ABKH*. Wenn *HK* senkrecht ist zu *AH* und *BK*, dann wäre auch im neuen Viereck die Hyp. d. rechten W. wahr. Sonst nehme man an, es sei ∢ *AHK* spitz und folglich sein Nebenwinkel ∢ *DHK* stumpf. Dann wäre im Viereck *ABKH*, zufolge der Hyp. d. spitzen W., $AB < HK$, während im Viereck *HKCD*, wegen der Hyp. d. stumpfen W., $HK < DC$ sein würde. Aber diese beiden Ungleichheiten sind widersprechend, weil $AB = DC$ ist [Hyp. d. rechten W. in *ABCD*]. Also kann ∢ *AHK* nicht spitz sein; und da man mit derselben Begründung beweisen könnte, daß ∢ *AHK* nicht stumpf sein kann, so schließt man, daß auch im Viereck *ABKH* die Hyp. d. rechten W. gilt.

Auf den Verlängerungen von *AD* und *BC* nehme man die Punkte *M*, *N* in gleichem Abstand von der Grundlinie *AB* an (Fig. 10). Ich sage, daß auch im Viereck *ABNM* die Hyp. d. rechten W. gilt. In der Tat, wenn *AM* ein Vielfaches von *AD* ist, so ist der Satz unmittelbar klar; sonst nehme man ein Vielfaches von *AD*, das größer ist als *AM* [Post. d. Archimedes], und auf den Strahlen *AD* . . ., *BC* . . . die beiden Abschnitte *AP*, *BQ* gleich diesem Vielfachen. Nach dem oben Gesagten gilt im Viereck *ABQP* die Hyp. d. rechten W. und folglich gilt dieselbe Hypothese auch im Viereck *ABNM*.

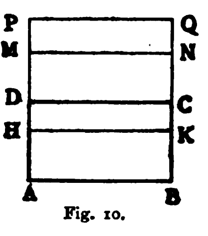


Fig. 10.

Endlich gilt die fragliche Hypothese auch für ein Viereck mit beliebiger Grundlinie, denn man kann in

Fig. 10 eine der auf AB senkrechten Seiten als Grundlinie annehmen.

Bemerkung. Dieser Lehrsatz von Saccheri ist dem Wesen nach enthalten in dem auf S. 16 angeführten von Giordano Vitale. In der Tat, es ist in Fig. 7 die Hypothese

$$DA = HK = CB$$

gleich berechtigt mit der andern

$$D = H = C = 1 \text{ Rechter.}$$

Aber aus der ersten folgt die Äquidistanz der beiden Geraden DC, AB[1]), also die Gültigkeit der Hyp. d. rechten W. in allen zweirechtwinkligen gleichschenkligen Vierecken, deren Höhe gleich der Strecke DA ist. Dieselbe Hypothese gilt dann auch noch in einem Viereck von beliebiger Höhe, weil man in ihm die Rollen der beiden Strecken, Grundlinie und Höhe, vertauschen kann.

Wenn in einem einzigen Fall die Hypothese des stumpfen Winkels richtig ist, dann ist sie in jedem andern Fall [Satz VI] richtig.

Wir betrachten (Fig. 11) unser gewohntes Viereck $ABCD$, indem wir annehmen, daß die Winkel C, D stumpf sind. Nimmt man auf AD und BC die Punkte H, K in gleichem Abstand von AB an, so bemerkt man zuerst, daß die Strecke HK nicht senkrecht sein kann auf den beiden Seiten AD, BC, insofern als im Viereck $ABKH$ und folglich im Hauptviereck dann die Hyp. d. rechten W. verwirklicht sein würde. Sei nun angenommen, daß Winkel KHA spitz ist, dann würde, nach der Hyp. d. spitzen W., $HK > AB$ sein, während, da in $ABCD$

1) In der Tat betrachtet Giordano in seinem Beweis ausdrücklich die Punkte der Strecke DC, von denen er zeigt, daß sie von der Grundlinie AB des Vierecks gleichen Abstand haben. Weiter ist derselbe Beweis anwendbar auf alle Punkte der Geraden DC. — Vgl. die oben (S. 16) angeführte Note von Bonola.

die Hyp. d. stumpfen W. gilt, $AB > CD$. Es folgt $HK > AB > CD$. Bewegt man jetzt die Gerade HK stetig, so daß sie senkrecht bleibt zu der Mittellinie OO' des Grundvierecks, so würde die von den gegenüberliegenden Seiten AD und BC eingeschlossene Strecke HK, die in der Anfangslage größer als AB ist, in der Endlage CD kleiner als AB werden. Auf Grund des Postulats der Stetigkeit würde es dann eine mittlere Lage geben $H'K'$ für die $H'K' = AB$. Folglich würde im Viereck $ABK'H'$ die Hyp. d. rechten W. gelten [Satz III], die nach dem vorhergehenden Lehrsatz in $ABCD$ nicht die Hyp. d. stumpfen W. bestehen ließe. Der Beweis gilt auch noch, wenn die Strecken AH, BK größer sind als AD, also ist es unmöglich, daß der Winkel AHK spitz ist. Also gilt in $ABKH$ die Hyp. d. stumpfen W. wie in $ABCD$.

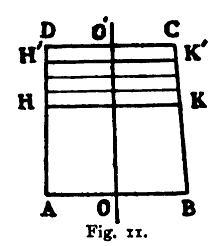


Fig. 11.

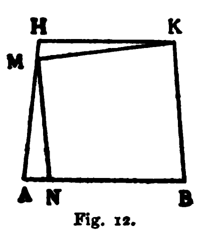


Fig. 12.

Wir gehen jetzt über zum Beweis des Lehrsatzes für ein Viereck mit beliebiger Grundlinie, z. B. mit der Grundlinie BK.

Da (Fig. 12) die Winkel K, H stumpf sind, so wird das Lot in K auf KB die Strecke AH im Punkte M treffen, den stumpfen Winkel AMK bildend [Satz vom Außenwinkel]. Dann wird in $ABKM$ nach dem 1. Hilfssatz: $AB > KM$. Nimmt man dann auf AB die Strecke $BN = MK$, so kann das zweirechtwinklige gleichschenklige Viereck $BKMN$ konstruiert werden mit dem stumpfen Winkel MNB, weil er Außenwinkel im Dreieck ANM ist. Dann

gilt auch im neuen Viereck die Hypothese des stumpfen Winkels.

Damit ist der Lehrsatz vollständig bewiesen.

Wenn in einem einzigen Fall die Hypothese des spitzen Winkels richtig ist, so ist sie richtig in allen Fällen. [Satz VII.]

Der Lehrsatz läßt sich sofort indirekt beweisen.

§ 13. Aus den letzten Lehrsätzen erhielt Saccheri leicht eine wichtige Folgerung hinsichtlich der Dreiecke. Je nachdem die Hypothese des rechten Winkels, die Hypothese des stumpfen Winkels oder die Hypothese des spitzen Winkels sich in der Wirklichkeit vorfindet, ist die Winkelsumme im Dreieck entsprechend gleich, größer oder kleiner als zwei Rechte. [Satz IX.]

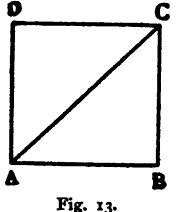


Fig. 13.

Sei (Fig. 13) ABC ein bei B rechtwinkliges Dreieck. Man ergänze das Viereck, indem man AD gleich BC und senkrecht zu AB zieht und dann D mit C verbindet. Bei der Hyp. d. rechten W. sind die beiden Dreiecke ABC, ACD gleich, daher: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$. Es folgt unmittelbar, daß im Dreieck ABC:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 2 \text{ Rechte.}$$

Bei der Hyp. d. stumpfen W. ist, weil

$$AB > DC : ACB > DAC^{1)};$$

weshalb wir im betrachteten Dreieck haben werden

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C > 2 \text{ Rechte.}$$

---

1) Diese Ungleichheit wird von Saccheri in seinem VIII. Satz bewiesen und dient als Hilfssatz zu Satz IX. Wir haben den leichten Beweis ausgelassen, weil er sich sehr oft in ganz elementaren Texten findet, vor der Parallelentheorie.

Bei der Hyp. d. spitzen W. folgt, weil $AB < DC$ ist: $\sphericalangle ACB < \sphericalangle DAC$, daher in demselben Dreieck:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C < 2 \text{ Rechte.}$$

Der bewiesene Lehrsatz, der leicht auf ein beliebiges Dreieck auszudehnen ist durch Zerlegung der Figur in zwei rechtwinklige Dreiecke, wird von Saccheri in Satz XV umgekehrt mittels eines indirekten Beweisverfahrens.

Eine leichte Folgerung aus diesen Ergebnissen ist der folgende Lehrsatz:

Wenn in einem einzigen Dreieck die Summe der Winkel gleich, größer oder kleiner als zwei rechte Winkel ist, dann ist in jedem andern Dreieck die genannte Summe entsprechend gleich, größer oder kleiner als zwei rechte Winkel.[1])

Dieser Satz, den Saccheri nicht ausdrücklich ausspricht, wurde im Fall der ersten und der dritten Hypothese wiedergefunden und bekannt gemacht von Legendre, etwa ein Jahrhundert später. Man wird ihn daher Lehrsatz von Saccheri und nicht Lehrsatz von Legendre nennen müssen, wie es gewöhnlich geschieht.

---

1) Ein anderer Satz von Saccheri, der uns nicht unmittelbar interessiert, sagt aus, daß, wenn in einem einzigen Viereck die Summe der Winkel gleich, größer oder kleiner als vier rechte Winkel ist, entsprechend daraus die Hypothese des rechten, stumpfen und des spitzen Winkels folgt. An diesen Satz knüpft eine Bemerkung an, die Saccheri über das Postulat des Wallis gemacht hat. [Vgl. § 9.] Wallis brauchte einfach die Existenz von nur zwei Dreiecken mit gleichen Winkeln und verschiedenen Seiten anzunehmen, um die Existenz eines Vierecks abzuleiten, in dem die Summe der Winkel gleich vier rechten Winkeln ist, daher die Gültigkeit der Hyp. d. rechten W. und folglich das V. Postulat.

§ 14. Die vorstehenden Sätze über das zweirechtwinklige gleichschenklige Viereck wurden von Saccheri und in der Folge von andern Geometern bewiesen mit Hilfe des archimedischen Postulats und des Prinzips der Stetigkeit. [Vgl. Satz V und VI.] Herr M. Dehn[1]) hat übrigens bewiesen, daß sie davon unabhängig sind. Wir können diesen Umstand auf elementarem Weg in folgender Weise feststellen.[2])

Auf der Geraden r (Fig. 14) seien zwei Punkte B, D fest angenommen, in ihnen zwei einander gleiche Lote BA, DC errichtet und sodann die beiden Punkte A und C mittels der Geraden s verbunden. Die erhaltene Figur, in der man offenbar hat $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$, ist für unsere Betrachtungen grundlegend, und an sie werden wir uns beständig halten. Dies festgesetzt seien E und E' zwei Punkte von s, der erste zwischen A und C gelegen, der zweite nicht; überdies seien F und F' die Fußpunkte der von E und E' auf die Gerade r gefällten Lote. Dann gelten die folgenden Lehrsätze:

1. Wenn $\left\{\begin{matrix} EF = AB \\ \text{oder} \\ E'F' = AB \end{matrix}\right\}$, so sind die Winkel BAC, DCA rechte.

2. Wenn $\left\{\begin{matrix} EF > AB \\ \text{oder} \\ E'F' < AB \end{matrix}\right\}$, so sind die Winkel BAC, DCA stumpfe.

---

1) Vgl. Math. Ann. 53, S. 405—439: „Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck".

2) Vgl. Bonola: *„I teoremi del Padre Gerolamo Saccheri sulla somma degli angoli di un triangolo e le ricerche di M. Dehn"*. Rend. Istituto Lombardo, serie II, vol. XXXVIII [1905].

3. Wenn $\left\{\begin{matrix} EF < AB \\ \text{oder} \\ E'F' > AB \end{matrix}\right\}$, so sind die Winkel BAC, DCA spitze.

Wir beweisen den ersten Satz.

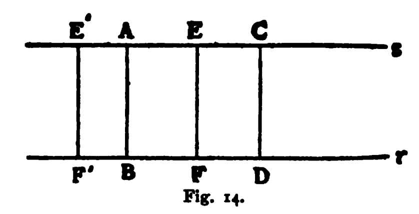


Fig. 14.

Aus der Annahme $EF = AB$ leitet man die folgenden Bedingungen ab:

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle FEA; \quad \sphericalangle FEC = \sphericalangle DCE,$$

die zusammen mit der grundlegenden Beziehung:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$$

zur Feststellung der Gleichheit der beiden Winkel $\sphericalangle FEA$, $\sphericalangle FEC$ führen. Da sie Nebenwinkel sind, werden sie beide rechte sein, und folglich werden die beiden Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle DCA$ rechte sein.

Dieselbe Betrachtung ist anwendbar bei der Annahme

$$E'F' = AB.$$

Beweisen wir den zweiten Satz (vgl. Fig. 15).

Nehmen wir an erster Stelle an $EF > AB$. Dann nehmen wir auf EF an $EJ = AB$ und verbinden J mit A und C.

Es gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$\sphericalangle BAJ = \sphericalangle FJA, \quad \sphericalangle DCJ = \sphericalangle FJC.$$

Überdies haben wir nach dem Satz vom Außenwinkel [Euklid XVII] auch:

$$\sphericalangle FJA + \sphericalangle FJC > \sphericalangle FEA + \sphericalangle FEC = 2 \text{ Rechte.}$$

Und da man hat:

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle DCA > \sphericalangle BAJ + \sphericalangle DCJ,$$

so folgt:

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle DCA > \sphericalangle FJA + \sphericalangle FJC > 2 \text{ Rechte.}$$

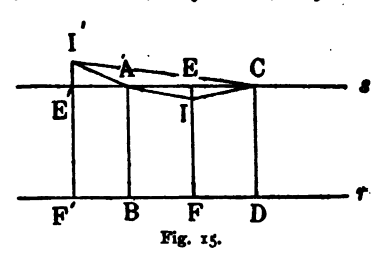


Fig. 15.

Sodann erhält man wegen der Gleichheit der Winkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle DCA$:

$$\sphericalangle BAC > 1 \text{ Rechter,} \quad \text{w. z. b. w.}$$

Nehmen wir zweitens an $E'F' < AB$. Wir verlängern sodann $E'F'$, bis wir die Strecke $F'J' = AB$ erhalten, und verbinden J' mit C und A (vgl. Fig. 15).

Es gelten nach demselben Schlußverfahren die folgenden Beziehungen:

$$\sphericalangle F'J'A = \sphericalangle BAJ'; \quad \sphericalangle F'J'C = \sphericalangle DCJ';$$
$$\sphericalangle J'AE' > \sphericalangle J'CE'; \quad \sphericalangle F'J'A < \sphericalangle F'J'C.$$

Setzt man diese Beziehungen zusammen, so folgt erstens

$$\sphericalangle BAJ' < \sphericalangle DCJ'$$

und hieraus erhalten wir, indem wir gliedweise die vorletzte der vorangegangenen Gleichungen abziehen:

$$\sphericalangle BAE' < \sphericalangle DCE' = \sphericalangle BAC.$$

Aber die beiden Winkel $\sphericalangle BAE'$, $\sphericalangle BAC$ sind Nebenwinkel, daher ergibt sich, daß $\sphericalangle BAC$ stumpf ist, w. z. b. w.

In vollkommen ähnlicher Weise wird der dritte Lehrsatz bewiesen.

Diese Lehrsätze lassen sich dann leicht durch indirektes Schlußverfahren umkehren. Wenn im besondern M und N die Mittelpunkte der beiden Strecken AC und BD sind, so haben wir für den Abschnitt MN des gemeinsamen Lotes der beiden Geraden AC, BD (vgl. Fig. 16):

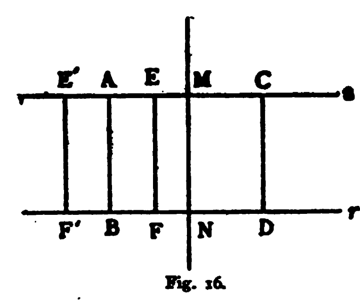


Fig. 16.

wenn: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA = 1$ Rechter,
dann: $MN = AB$;

wenn: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA > 1$ Rechter,
dann: $MN > AB$;

wenn: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA < 1$ Rechter,
dann: $MN < AB$.

Außerdem ist leicht zu sehen, daß:

1. wenn: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA = 1$ Rechter, auch:
$\left\{\begin{matrix} \sphericalangle FEM \\ \sphericalangle F'E'M \end{matrix}\right\} = 1$ Rechter;

2. wenn: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA > 1$ Rechter, auch:
$\left\{\begin{matrix} \sphericalangle FEM \\ \sphericalangle F'E'M \end{matrix}\right\} > 1$ Rechter;

3. wenn: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA < 1$ Rechter, auch:
$\left\{\begin{matrix} \sphericalangle FEM \\ \sphericalangle F'E'M \end{matrix}\right\} < 1$ Rechter.

In der Tat gelten im ersten Fall, da die Geraden r und s äquidistant sind, die folgenden Beziehungen:

$$\sphericalangle NMA = \sphericalangle FEM = \sphericalangle BAC = \sphericalangle F'E'M = 1 \text{ Rechter.}$$

Um den zweiten und dritten Fall zu beweisen, genügt es, indirekt zu schließen, wobei man die oben erhaltenen Ergebnisse sich vergegenwärtigt.

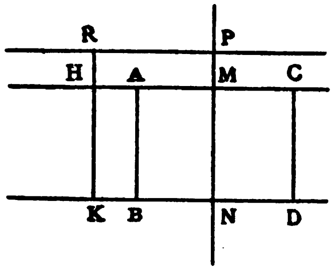


Fig. 17.

Sei jetzt (Fig. 17) P ein nicht zwischen den Punkten M und N gelegener Punkt der Geraden MN. Sei PR senkrecht zu MN und RK senkrecht auf BD in K. Dies letztere Lot wird AC in einem Punkt H treffen. Dies festgesetzt, erlauben die vorausgehenden Lehrsätze ohne weiteres zu behaupten, daß:

wenn: $\sphericalangle BAM = 1$ Rechter, auch:

$$\left\{\begin{matrix} \sphericalangle KHM \\ \sphericalangle KRP \end{matrix}\right\} = 1 \text{ Rechter;}$$

wenn: $\sphericalangle BAM > 1$ Rechter, auch:

$$\left\{\begin{matrix} \sphericalangle KHM \\ \sphericalangle KRP \end{matrix}\right\} > 1 \text{ Rechter;}$$

wenn: $\sphericalangle BAM < 1$ Rechter, auch:

$$\left\{\begin{matrix} \sphericalangle KHM \\ \sphericalangle KRP \end{matrix}\right\} < 1 \text{ Rechter.}$$

Wie man leicht folgert, gelten diese Eigenschaften auch, wenn der Punkt P zwischen M und N fällt.

Schließlich sind also die drei letzten Lehrsätze, die offenbar mit denen von Saccheri über die zweirechtwinkligen gleichschenkligen Vierecke zusammenfallen, nämlich: je nachdem in einem Fall die Hypothese des rechten Winkels, des stumpfen Winkels oder des spitzen Winkels richtig ist, so ist sie in jedem andern Fall richtig, unabhängig vom Postulat des Archimedes bewiesen.

Wollen wir jetzt von den Lehrsätzen über die Vierecke übergehen auf die Lehrsätze über die Dreiecke, die am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochen sind, so können wir ohne weiteres auf die Beweise von Saccheri (vgl. S. 30) verweisen, weil diese Beweise in der Tat nicht von dem fraglichen Postulat abhängen. Hiermit ist das Ergebnis erreicht, das wir erzielen wollten.

§ 15. Um die Auseinandersetzung des Werkes von Saccheri kürzer zu gestalten, lösen wir aus den Sätzen XI und XII den Inhalt des folgenden zweiten Hilfssatzes heraus.

Sei ABC ein in C rechtwinkliges Dreieck, sei H der Mittelpunkt von AB und K der Fußpunkt des von H auf AC gefällten Lotes, dann werden wir haben:

$AK = KC$ bei der Hyp. d. rechten W.,

$AK < KC$ bei der Hyp. d. stumpfen W.,

$AK > KC$ bei der Hyp. d. spitzen W.

Der die Hyp. d. rechten W. betreffende Teil ist unmittelbar klar. Bei der Hyp. d. stumpfen W. wird, da die Summe der Winkel im Viereck größer ist als vier rechte Winkel: $\sphericalangle AHK < \sphericalangle HBC$. Fällt man dann (Fig. 18) HL von H senkrecht auf BC, so ergeben die Dreiecke AHK, HBL mit gleichen Hypotenusen kraft

der vorstehenden Beziehung die Ungleichheit $AK < HL$. Aber im dreirechtwinkligen Viereck $HKCL$ ist $\sphericalangle H$ stumpf [Hyp. d. stumpfen W.], daher wird: $HL < KC$, also: $AK < KC$.

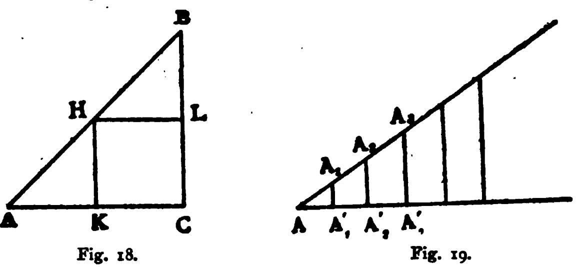


Fig. 18. Fig. 19.

In derselben Art beweist man den dritten Teil des Hilfssatzes.

Dieser Hilfssatz könnte in folgender Weise ausgedehnt werden (vgl. Fig. 19):

Nimmt man auf dem einen Schenkel eines Winkels mit dem Scheitelpunkt A aufeinanderfolgend die gleichen Abschnitte AA_1, A_1A_2, $A_2A_3 \ldots$ und konstruiert man die entsprechenden Projektionen AA_1', $A_1'A_2'$, $A_2'A_3'$ auf dem zweiten Schenkel des Winkels, so gelten die folgenden Beziehungen:

$AA_1' = A_1'A_2' = A_2'A_3' = \cdots$
bei der Hyp. d. rechten W.,

$AA_1' < A_1'A_2' < A_2'A_3' < \cdots$
bei der Hyp. d. stumpfen W.,

$AA_1' > A_1'A_2' > A_2'A_3' > \cdots$
bei der Hyp. d. spitzen W.

Wir beweisen jetzt den Satz (Satz XI, XII):

Bei der Hypothese des rechten Winkels und der des stumpfen Winkels schneiden sich das Lot und die auf einer Geraden schräge Gerade.

Es seien (Fig. 20) LP und AD zwei Gerade, die eine senkrecht, die andere schräg zur Geraden AP, und der Winkel DAP sei spitz. Nachdem auf AD die gleichen Abschnitte AD, DF_1 aneinanderschließend angenommen

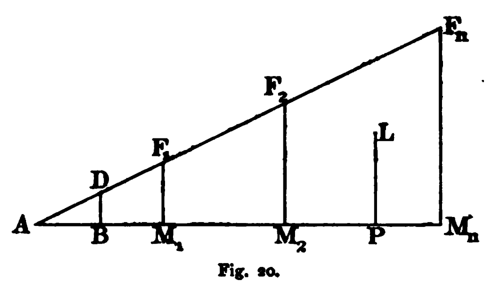


Fig. 20.

sind, fällen wir von D und F_1 die Lote DB und F_1M_1 auf die Gerade AP. Kraft des vorausgeschickten Hilfssatzes wird man haben:

$$BM_1 \gtreqless AB$$

oder

$$AM_1 \gtreqless 2\,AB.$$

Sei F_1F_2 eine Strecke gleich mit und anschließend an AF_1 und sei M_2 der Fußpunkt des von F_2 auf AP gefällten Lotes; dann haben wir entsprechend:

$$AM_2 \gtreqless 2\,AM_1$$

und folglich

$$AM_2 \gtreqless 2^2 AB.$$

Dies Verfahren kann wiederholt werden, dann nochmals wiederholt usw. So werden wir einen Punkt F_n von AD erhalten, derart, daß seine Projektion M_n auf AP einen Abschnitt AM_n bestimmt, der die Beziehung erfüllt:

$$AM_n \gtreqless 2^n AB.$$

Aber für hinreichend großes n hat man [Archimedisches Postulat[1])]

---

1) Das Postulat des Archimedes, von dem hier Gebrauch

$$2^n AB > AP$$

und hieraus

$$AM_n > AP.$$

Der Punkt P liegt also auf der Kathete AM_n des rechtwinkligen Dreiecks AM_nF_n. Dann muß das Lot PL auf AP, da es die Kathete AM_n trifft, aber nicht die andere Kathete M_nF_n, notwendig die Hypotenuse AF_n treffen, d. h. die Gerade AD.

Damit ist der Lehrsatz bewiesen.[1])

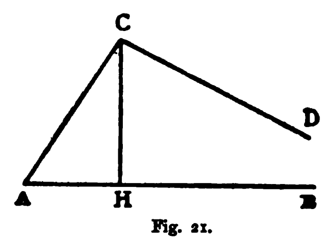


Fig. 21.

Hieraus folgert man dann den Satz:

Bei der Hypothese des rechten Winkels und bei der des stumpfen Winkels ist das V. Postulat des Euklid richtig. [Satz XIII.]

Seien (Fig. 21) AB, CD zwei von der Geraden AC geschnittene Gerade. Wir setzen voraus, daß

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD < 2 \text{ Rechte},$$

dann ist einer der beiden Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ACD$, z. B. der erste, spitz. Von C fälle man das Lot CH auf AB. Im Dreieck ACH wird kraft der gemachten Annahmen:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle H \geqq 2 \text{ Rechte}.$$

---

gemacht wird, schließt hier offenbar versteckt die Unendlichkeit der Geraden ein.

1) Die von Saccheri befolgte Methode, diesen Satz zu beweisen, ist wesentlich identisch mit der des Nasîr-Eddîn. Nasîr-Eddîn aber betrachtet die Hyp. d. rechten W., da er schon vorher bewiesen hat, daß die Summe der Winkel im Dreieck zwei rechten Winkeln gleich ist. — Angebrachtermaßen bemerken wir, daß Saccheri das Werk des arabischen Geometers gekannt und kritisiert hat.

Aber nach Voraussetzung haben wir noch:

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD < 2 \text{ Rechte.}$$

Durch Zusammensetzung dieser beiden Beziehungen erhält man

$$\sphericalangle H > \sphericalangle HCD.$$

Und da der Winkel H ein rechter ist, ergibt sich $\sphericalangle HCD$ als spitzer Winkel. Dann treffen sich kraft der Sätze XI, XII die Geraden CD und AB.[1])

Dieses Ergebnis gestattet Saccheri zu schließen, daß die Hypothese des stumpfen Winkels falsch ist [Satz XIV]. In der Tat, bei dieser Hypothese gilt das euklidische Postulat [Satz XIII], und folglich gelten die gewöhnlichen Lehrsätze, die aus diesem Postulat folgen. Aber dann ist im Fundamentalviereck die Summe der Winkel gleich vier rechten Winkeln, d. h. die Hypothese des rechten Winkels ist richtig.[2])

§ 16. Da Saccheri beweisen will, daß das V. Postulat ganz unabhängig gilt, so rüstet er sich, auch die Hyp. d. spitzen W. zu zerstören.

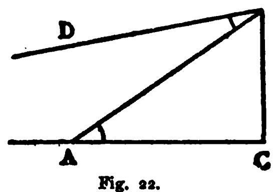


Fig. 22.

Zuerst ist die Bemerkung angebracht, daß es bei dieser Hypothese ein Lot und eine

1) Auch dieser Beweis befindet sich im Werk des Nasîr-Eddîn, wodurch Saccheri offenbar zu seinen Untersuchungen veranlaßt wurde.

2) Es ist angebracht zu bemerken, daß Saccheri bei diesem Beweis von einem besonderen Schlußverfahren Gebrauch macht, von dem wir in § 11 sprachen. In der Tat: auch bei der Annahme, daß die Hyp. d. stumpfen W. wahr ist, gelangt man zum Schluß, daß die Hyp. d. rechten W. wahr ist. Das ist eine charakteristische Form, die in diesem Fall das gewöhnliche indirekte Schlußverfahren annehmen kann.

zu derselben Geraden schräge Gerade gibt, die sich nicht treffen. [Satz XVII.] Um sie zu konstruieren, ziehe man (Fig. 22) von der Ecke B des in C rechtwinkligen Dreiecks ABC die Gerade BD, so daß

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAC$$

ist. Dann ist bei der Hyp. d. spitzen W. der Winkel $\sphericalangle CBD$ spitz und die beiden Geraden CA und BD, die sich nicht treffen [Euklid, XXVII], sind die eine schräg, die andere senkrecht zu BC.

Von hier ab werden wir ausschließlich die Hyp. d. spitzen W. betrachten.

Seien (Fig. 23) a, b zwei einander nichtschneidende Gerade in derselben Ebene. Von den Punkten A_1, A_2 von a fälle man die Lote A_1B_1, A_2B_2 auf b. Die Winkel $\sphericalangle A_1$ und $\sphericalangle A_2$ des erhaltenen Vierecks können sein: 1. der eine ein rechter und der andere spitz; 2. alle beide spitz; 3. der eine spitz und der andere stumpf. Im ersten Fall existiert ohne weiteres das gemeinsame Lot der beiden Geraden a und b. Im zweiten Fall beweist man

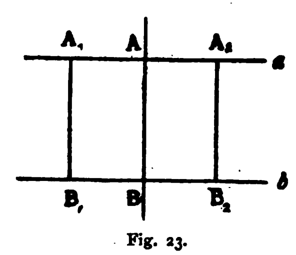


Fig. 23.

die Existenz des gemeinsamen Lotes durch einen Stetigkeitsschluß [Saccheri, Satz XXII]. In der Tat, wenn man die Gerade A_1B_1 stetig bewegt, indem man sie immer senkrecht zu b bleiben läßt, bis man sie nach A_2B_2 bringt, so wächst der Winkel $\sphericalangle B_1A_1A_2$, der in der Anfangslage spitz ist, bis er stumpf wird: es folgt die Existenz einer mittleren Lage AB, bei der der Winkel $\sphericalangle BAA_2$ ein rechter ist. Dann ist AB das gemeinsame Lot der beiden Geraden a, b.

Im dritten Fall haben die beiden Geraden a, b

entweder kein gemeinsames Lot, oder, wenn das Lot existiert, fällt es nicht zwischen B_1 und B_2.

Wenn als Hypothese die Existenz von zwei in derselben Ebene gelegenen einander nicht schneidenden Geraden ohne gemeinsames Lot gegeben ist, so beweist Saccheri, daß solche Gerade sich immer mehr nähern [Satz XXIII], und daß ihr Abstand schließlich kleiner wird als eine beliebig kleine Strecke [Satz XXV]. Mit andern Worten, gibt es zwei Geraden in einer Ebene, die sich nicht schneiden und kein gemeinsames Lot haben, so müssen sie sich asymptotisch zueinander verhalten.[1])

Um die wirkliche Existenz von asymptotischen Geraden zu beweisen, schließt Saccheri fast genau so: Die Geraden eines Büschels mit dem Scheitelpunkt A können in bezug auf eine Gerade b, die mit dem Büschel in derselben Ebene liegt und nicht durch A geht, in zwei Gruppen geteilt werden:

1. Gerade des Büschels, die b treffen; 2. Gerade des Büschels, die mit b ein gemeinsames Lot haben. Kraft des Prinzips der Stetigkeit gibt es zwei Gerade p, q, die das Büschel in zwei Teile zerlegen (vgl. Fig. 24). Zum ersten Teil gehören die b schneidenden, zum zweiten gehören die b nicht schneidenden, die mit b ein gemeinsames Lot haben. Was die Geraden p, q betrifft, so beweist man, daß sie weder zum einen noch zum andern Teil gehören. In der Tat, daß p nicht b schneidet, liegt auf der Hand. Um zu beweisen, daß p mit b kein gemeinsames Lot hat, schließen wir indirekt (Fig. 25). Es sei PB das angenommene Lot auf den beiden Geraden p und b. Nachdem von A das Lot AM auf b gefällt

1) Dies Ergebnis rechtfertigt die von den Griechen aufgeworfene Frage über die Möglichkeit von asymptotischen Geraden in derselben Ebene. [Vgl. S. 3.]



ist, und auf b der Punkt B' auf der M in bezug auf B gegenüberliegenden Seite angenommen, errichte man $B'P'$ senkrecht zu b, dann fälle man das Lot AP' auf $B'P'$. Die Gerade AP' schneidet b nicht, weil sie mit b ein gemeinsames Lot hat, und trifft PB in einem Punkt R.

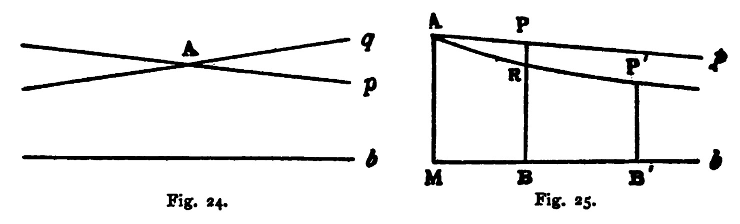


Fig. 24. Fig. 25.

Der Winkel $\sphericalangle ARB$, als Supplementwinkel des spitzen Winkels $\sphericalangle BRP'$, ist stumpf, deswegen fällt der Strahl AR in den Winkel $\sphericalangle MAP$. Aber dann wäre AR zu gleicher Zeit Schneidende und Nichtschneidende von b. Dieser Widerspruch bringt die Annahme eines gemeinsamen Lotes von b und p zu Fall.[1])

Ber.

§ 17. An dieser Stelle versucht Saccheri ein Schlußverfahren, wobei er sich mehr als auf die Logik, auf die Anschauung und den Glauben an die Gültigkeit des V. Postulats verläßt. Um zu beweisen, daß die Hypothese des spitzen Winkels unbedingt falsch ist, weil sie der Natur der geraden Linie widerspricht [Satz XXXIII], stützt er sich auf fünf Hilfssätze, die auf reichlich 16 Seiten entwickelt sind; im wesent-

1) Im Werk Saccheris finden sich vor diesem Ergebnis viele andere interessante Sätze, von denen folgender erwähnenswert ist: Wenn zwei Gerade sich immer näher kommen und ihr Abstand bleibt immer größer als eine bestimmte angegebene Strecke, so wird die Hypothese des spitzen Winkels zerstört. Also kommt es, wenn man das Nichtvorhandensein asymptotischer Geraden fordert, hinaus auf die Annahme des euklidischen Postulats.

lichen aber beschränkt er sich auf die Behauptung, daß, wenn sie wahr wäre, die Gerade AP' [Fig. 25] mit MB ein Lot gemein hätte im gemeinsamen unendlich fernen Punkt, was der Natur der geraden Linie widerspricht. Der angebliche Beweis von Saccheri gründet sich also auf Ausdehnung für das Unendliche von bestimmten Eigenschaften, die für Figuren in endlicher Entfernung gelten.

Saccheri ist übrigens von seinem Schlußverfahren nicht zufrieden gestellt und versucht den gewünschten Beweis auch zu erhalten, indem er den alten Begriff der Äquidistanz wieder aufnimmt. Es lohnt sich nicht der Mühe, die neue Erörterung zu bringen, insofern als sie nichts Besseres bringt als seine Vorgänger gemacht haben.

Obwohl es sein Ziel verfehlt, ist das Werk von Saccheri von großer Wichtigkeit; außer daß es den größten Versuch zugunsten des V. Postulats darstellt, konnte es nicht umhin, gerade durch die Tatsache, daß es keine Widersprüche unter den Folgerungen aus der Hyp. d. spitzen W. entdeckte, die Vermutung einzuflößen, daß auf dieser Hypothese ein logisch folgerichtiges geometrisches System errichtet werden kann, und daß das euklidische Postulat unbeweisbar ist. [1])

1) Das Werk von P. Saccheri war ziemlich verbreitet nach seiner Veröffentlichung und zwei Geschichtswerke der Mathematik sprachen davon, das von J. C. Heilbronner [Leipzig 1742] und das von Montucla [Paris 1758]. Übrigens wird es eingehend analysiert von G. S. Klügel in seiner hier unten (Anm. 2, S. 46) angeführten Dissertation. Nichtsdestoweniger geriet es in Vergessenheit. Erst 1889 rief E. Beltrami mit seiner Mitteilung: „*Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewsky*“ wieder die Aufmerksamkeit der Geometer wach [Rend. Acc. Lincei (4) V, p. 441—448]. In der Folge wurde das Werk Saccheris ins Englische übersetzt von G. B. Halsted [Am. Math. Monthly I, 1894 u. ff.], ins Deutsche von den Herren Stäckel und Engel [Th. der P. 1895], ins Italienische von G. Boccardini [Milano, Höpli, 1904].



Johann Heinrich Lambert [1728—1777].

§ 18. Welchen Einfluß das Werk von Saccheri auf die Geometer des XVIII. Jahrhunderts ausgeübt hat, kann man nicht genau angeben: auf jeden Fall ist es wahrscheinlich, daß der Schweizer Geometer Lambert es gekannt hat[1]), weil er in seiner „Theorie der Parallellinien" [1766] eine Dissertation von G. S. Klügel [1739—1812] zitiert[2]), wo das italienische Werk eingehend analysiert wird. Die „Theorie der Parallellinien" von Lambert, deren Veröffentlichung 1786 nach dem Tode des Verfassers von J. Bernoulli und C. F. Hindenburg besorgt ist[3]), ist in drei Teile geteilt. Der erste, kritischer und philosophischer Natur, gibt Bemerkungen über die doppelte Frage, die man sich hinsichtlich des V. Postulats vorlegen kann, nämlich, ob man es einfach mit Hilfe der vorhergehenden Sätze beweisen kann, oder ob statt dessen nicht die Anwendung einer andern Hypothese erforderlich ist. Der zweite Teil ist der Auseinandersetzung verschiedener Versuche gewidmet, in denen das euklidische Postulat auf sehr einfache Sätze zurückgeführt wird, die übrigens ihrerseits bewiesen werden müßten. Der dritte wichtigste enthält ein System von Untersuchungen ähnlich denen des Paters Saccheri, das wir kurz zusammenfassen wollen.

---

1) Vgl. Segre: „*Congetture intorno alla influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non euclidea*". Atti Acc. Scienze di Torino t. XXXVIII [1903].

2) „*Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent A. G. Kaestner et auctor respondens*" G. S. Klügel. [Göttingen 1763.]

3) Vgl. Magazin für reine und angewandte Math. 2. Stück, p. 137—164, 3. Stück, p. 325—358 [1786]. — Das Werk Lamberts wurde wieder veröffentlicht von Engel und Stäckel in ihrer „Th. der P.", S. 135—208, wo historische Notizen vorausgeschickt sind, die den Verfasser betreffen.

§ 19. Die Grundfigur von Lambert ist ein dreirechtwinkliges Viereck, und die drei Hypothesen werden über die Natur des vierten Winkels gemacht. Die erste ist die Hyp. d. rechten W., die zweite die Hyp. d. stumpfen W., die dritte die Hyp. d. spitzen W. Auch bei Behandlung dieser Hypothesen nähert sich der Verfasser der Methode von Saccheri.

Die erste Hypothese führt leicht auf das euklidische System.

Um die zweite Hypothese zurückzuweisen, kommt Lambert auf eine Figur (Fig. 26), die von zwei Geraden gebildet ist, welche auf einer dritten Geraden senkrecht stehen. Von den aufeinander folgenden Punkten $B, B_1, B_2 \cdots B_n$ von b fällt man die Lote $BA, B_1A_1 \cdots B_nA_n$ und beweist an erster Stelle, daß die Abschnitte der Lote zwischen A und B vom Lot AB an abnehmen, sodann, daß der Unterschied eines jeden und des nächstfolgenden beständig wächst. So ergibt sich:

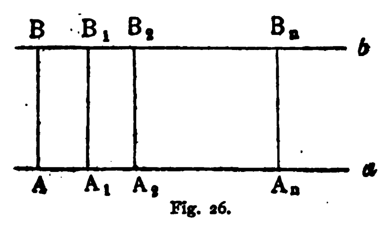


Fig. 26.

$$BA - B_nA_n > (BA - B_1A_1) \cdot n.$$

Aber, wenn n hinreichend groß ist, so wird das zweite Glied der Ungleichheit so groß als man will [Post. d. Archimedes][1]), während das erste Glied immer kleiner als BA ist. Dieser Widerspruch erlaubt Lambert die Erklärung, daß die zweite Hypothese falsch ist.

Um die dritte Hypothese zu behandeln, stützt

1) Das Postulat des Archimedes wird auch hier in der Form gebracht, daß es die unendliche Länge der Geraden in sich schließt. [Vgl. Saccheri, Anm. S. 39.]

sich Lambert wieder auf die vorhergehende Figur, an der er beweist, daß die Strecken BA, B_1A_1, $B_2A_2 \cdots B_nA_n$ wachsen, und daß zu gleicher Zeit die Unterschiede jeder Strecke von der vorhergehenden wachsen. Dieses Ergebnis führt ihn aber nicht auf Widersprüche, und deshalb wird er, wie schon Saccheri, gezwungen, in den Schlüssen fortzufahren. Er findet nachher bei der dritten Hypothese, daß die Summe der Winkel eines Dreiecks kleiner ist als zwei rechte Winkel, und, über Saccheri hinausgehend, entdeckt er, daß der Defekt eines Polygons, d. h. der Unterschied zwischen $2(n-2)$ rechten Winkeln und der Winkelsumme eines Polygons proportional der Fläche desselben Polygons ist. Dies Ergebnis erhält man leichter, wenn man beachtet, daß sowohl der Flächeninhalt wie der Defekt eines Polygons, das die Summe von mehreren andern ist, entsprechend die Summe der Flächen und der Defekte der Teilpolygone ist.[1])

§ 20. Eine andere bemerkenswerte Entdeckung von Lambert bezieht sich auf die Messung der geometrischen Größen. Sie besteht gerade darin, daß, während in der gewöhnlichen Geometrie bei der Messung von Strecken der Wahl einer besonderen Einheit nur eine relative Bedeutung zukommt, bei der auf die dritte Hypothese begründeten man ihr eine absolute Bedeutung verleihen kann.

Wir müssen vor allem den Unterschied aufklären, der sich hier zwischen absolut und relativ zeigt. Bei

1) Es muß erwähnt werden, daß schon Saccheri dem genannten Defekt begegnet war bei der Hyp. d. spitzen W., und daß er auch implizite bemerkt hatte, daß ein Viereck, das die Summe von mehreren anderen ist, zum Defekt die Defektsumme hat [Satz XXV]. (Vgl. „Th. d. P.“, S. 94.) Allerdings hatte er keine Folgerung über die Proportionalität zwischen Fläche und Defekt daraus gezogen.

vielen Fragen tritt es ein, daß die als gegeben vorausgesetzten Elemente in zwei Gruppen geteilt werden können, derart, daß die der ersten Gruppe festbleiben im ganzen Bereich unserer Betrachtungen, während die der zweiten Gruppe sich in eine Vielheit möglicher Fälle abwandeln können. Wenn das eintritt, pflegt man oft die ausdrückliche Erwähnung der gegebenen Stücke der ersten Gruppe zu übergehen und als relativ alles das zu betrachten, was von den gegebenen Veränderlichen abhängt, als absolut alles, was von den fest gegebenen Größen abhängt.

So nimmt man bei der Theorie der Rationalitätsbereiche als gegebene Größen der zweiten Gruppe [veränderliche Größen] gewisse Grundirrationalitäten [die eine Basis bilden] und als gegeben in der ersten Gruppe die Einheit [1], die oft unerwähnt bleibt, weil sie allen Rationalitätsgebieten gemein ist. Spricht man dann von einer Zahl, so sagt man, sie sei rational hinsichtlich einer bestimmten Basis, wenn sie dem durch diese Basis definierten Rationalitätsbereich angehört; man sagt dagegen, sie sei absolut rational, wenn sie sich als rational in bezug auf die Basis 1 erweist, die allen Bereichen gemein ist.

Zur Geometrie übergehend bemerken wir, daß bei jeder vorliegenden Aufgabe im allgemeinen bestimmte Figuren und daher die Größen ihrer Elemente als gegeben vorausgesetzt sind; aber außer diesen gegebenen Veränderlichen [der zweiten Gruppe], die in willkürlicher Weise gewählt werden können, ist immer noch implizite vorausgesetzt die Anwendung der Grundgebilde: Gerade, Ebenen, Büschel usw. [feste gegebene Stücke der ersten Gruppe]. Es muß dann jede Konstruktion, jede Messung, jede Eigenschaft einer Figur für relativ gelten, wenn sie im wesentlichen sich bezieht auf die veränderlichen Stücke; sie muß aber

absolut heißen, wenn sie sich bezieht nur auf die festen Stücke [Fundamentalfiguren] oder auch wenn sie, obwohl für abhängig von den veränderlichen Stücken erklärt, von ihnen nur scheinbar abhängt, so daß sie unverändert bleibt bei ihrer Veränderung.

In diesem Sinne ist es klar, daß die Streckenmessung in der gewöhnlichen Geometrie notwendig relative Bedeutung hat. In der Tat erlaubt uns die Existenz der Ähnlichkeitstransformationen in keiner Weise die Größe einer Strecke hinsichtlich der Grundgebilde [Gerade, Büschel usw.] zu individualisieren. Für den Winkel aber kann man einen Maßstab wählen, der eine absolute Eigenschaft von ihm ausdrückt: es genügt in der Tat, seine Beziehung zum Vollwinkel zu nehmen, d. h. zum ganzen Büschel, das eines der Grundgebilde ist.

Kehren wir jetzt zu Lambert und seiner der dritten Hypothese entsprechenden Geometrie zurück. Er hat bemerkt, daß man jeder Strecke einen bestimmten leicht konstruierbaren Winkel entsprechen lassen kann. Daraus folgt, daß jede Strecke mit dem Grundgebilde Büschel in Beziehung steht, und daß man daher in der [hypothetischen] neuen Geometrie auch der Streckenmessung eine absolute Bedeutung zuerteilen kann.

Um sodann in der einfachsten Weise zu sehen, wie man jeder Strecke einen Winkel zuordnen und so eine absolute zahlenmäßige Darstellung der Strecken erhalten kann, nehmen wir an, es sei über jeder Strecke ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Wir können jeder Strecke den Winkel des entsprechenden Dreiecks zuordnen und folglich die Maßzahl dieses Winkels, wo zu beachten ist, daß eine eineindeutige Beziehung zwischen den Strecken und den in bestimmten Grenzen enthaltenen Winkeln besteht.

Die erhaltene Zahlendarstellung der Strecken besitzt aber nicht die distributive Eigenschaft, die den

Längen zukommt; denn summiert man zwei Strecken, so werden die entsprechenden Winkel nicht summiert. Man kann allerdings eine Funktion des Winkels bestimmen, die diese Eigenschaft besitzt, und einer Strecke nicht den fraglichen Winkel, sondern diese Funktion des Winkels zuordnen. Diese Funktion gibt uns bei jedem Wert des Winkels, der innerhalb der bestimmten Grenzen liegt, ein absolutes Maß für die Strecken. Die absolute Einheit ist die Strecke, für die die Funktion den Wert 1 annimmt.

Beachtet man dann, daß, sobald eine bestimmte Funktion des Winkels im oben angegebenen Sinne distributiv ist, auch das Produkt dieser Funktion mit einer willkürlichen Konstanten dieselbe Eigenschaft besitzt, so ist es klar, daß man über diese Konstante immer so verfügen können wird, daß die absolute Streckeneinheit gerade die Strecke ist, die einem vorgeschriebenen Winkel entspricht, etwa dem Winkel von 45^0. Die Möglichkeit, bei gegebenem Winkel die absolute Streckeneinheit zu konstruieren, ist an die Lösung der folgenden Aufgabe geknüpft: Bei der Hypothese des spitzen Winkels ein gleichseitiges Dreieck mit vorgegebenem Defekt zu konstruieren.

Was die absolute Messung der Polygonflächeninhalte betrifft, so bemerken wir, daß sie ohne weiteres durch den Defekt der Polygone gegeben ist. Auch von den Polyedern könnte man ein absolutes Maß angeben.

Aber nach unserer Raumanschauung erscheint uns die absolute Messung aller dieser geometrischen Größen nicht möglich, daher könnte man mit Lambert, wenn man die Existenz einer absoluten Einheit für die Strecken verneint, die dritte Hypothese verwerfen.

§ 21. Man glaube nicht, daß Lambert meint, das V. Postulat so bewiesen zu haben, da er weiß, wie willkürlich die vorstehende Behauptung ist!

Um den gewünschten Beweis zu erhalten, geht er in der Untersuchung der Folgen aus der dritten Hypothese weiter, aber es gelingt ihm nur, seine Frage in eine andere gleich schwer zu lösende umzuformen.

Andere sehr interessante Sachen sind in der Theorie der Parallellinien enthalten, z. B. die nahe Beziehung der Geometrie, die auf der Ebene bei Annahme der zweiten Hypothese gelten würde, zur sphärischen Geometrie[1]) und eine Bemerkung bezüglich der Unabhängigkeit dieser letzteren vom Parallelenpostulat. Hinsichtlich der dritten Hypothese sprach er dann folgende scharfsinnige und originelle Ansicht aus: Ich sollte daraus fast den Schluß machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor.

Zu dieser Auffassung der Dinge gelangte er vielleicht von der Formel $r^2(A+B+C-\pi)$ aus, die den Inhalt eines sphärischen Dreiecks ausdrückt, denn sie wird, wenn man darin den Radius r mit dem imaginären Radius $r\sqrt{-1}$ vertauscht:

$$r^2(\pi - A - B - C),$$

also die Formel für den Inhalt eines ebenen Dreiecks bei der dritten Hypothese von Lambert.[2])

§ 22. Lambert läßt also die Frage in der Schwebe, vielmehr da er seine Untersuchungen nicht veröffentlicht hat, darf man vermuten, daß er schon den Ausblick zu einem neuen Standpunkt hatte.

---

1) In der Tat ist in der sphärischen Geometrie die Summe der Winkel eines Vierecks größer als vier rechte Winkel usw.

2) Vgl. Stäckel und Engel: „Th. d. P.“, S. 146.

Übrigens ist wohl zu bemerken, daß bei dem allgemeinen Mißerfolg derartiger Untersuchungen in der zweiten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts sich die Überzeugung bildete, daß man notwendig das euklidische Postulat ohne Beweis annehmen müsse oder ein anderes gleichberechtigtes Postulat.

In Deutschland, wo viele Arbeiten über den Gegenstand einander folgten, hatte die Überzeugung schon eine ziemlich feste Form angenommen. Wir finden sie wieder bei A. G. Kästner, dem großen Förderer der Untersuchungen über die Parallelen[1]), bei seinem Schüler G. S. Klügel, dem Verfasser der wertvollen Kritik über die berühmtesten Versuche zum Beweis des V. Postulats. In diesem Werke kommt Klügel, nachdem er alle vorliegenden Beweisversuche für ungenügend befunden hat, auf die Möglichkeit, daß einander nicht schneidende Gerade divergieren können [„Möglich wäre es freilich, daß Gerade, die sich nicht schneiden, voneinander abweichen“], und fügt hinzu, daß der Anschein der Widersinnigkeit, die sie darstellt, keine Folge der bestimmten Begriffe von Geraden und Kurven ist, sondern eher ein Umstand, der aus der Erfahrung und dem Urteil unserer Sinne folgt [„Daß so etwas widersinnig ist, wissen wir nicht infolge strenger Schlüsse oder vermöge deutlicher Begriffe von der geraden und der krummen Linie, vielmehr durch die Erfahrung und durch das Urteil unserer Augen“].

Die Untersuchungen von Saccheri und Lambert neigen dazu, die Meinung von Klügel zu stützen, aber man kann sie nicht für Beweise der Unbeweisbarkeit der euklidischen Hypothese ansehen. Und dennoch

1) Zur Orientierung über Kästner vgl. Stäckel und Engel: „Th. der P.“, S. 139—141.



könnte man zu einem Beweis gelangen, indem man, auf dem von den beiden genannten Geometern eröffneten Weg fortschreitend, beliebig viele weitere Sätze ableitet, die mit den Grundsätzen der Geometrie nicht in Widerspruch stehen.

Jedenfalls, daß man sich auf dies letztere Gebiet wagte ohne Saccheris Voreingenommenheit, der dabei Widersprüche entdecken wollte, das bildet in geschichtlicher Folge den entscheidenden Schritt, die Unbeweisbarkeit des euklidischen Postulats zu erobern und die nichteuklidischen Geometrien zu entdecken.

Aber von dem Werk von Saccheri und Lambert bis zu dem von Lobatschefsky und Bolyai, das nach dem hier ausgesprochenen Gedanken geformt ist, mußte noch mehr als ein halbes Jahrhundert vergehen!

Die französischen Geometer am Ende des XVIII. Jahrhunderts.

§ 23. Die Kritik über die Parallelen, die schon in Italien und in Deutschland zu Ergebnissen von großem Interesse geführt hatte, erhielt gegen das Ende des XVIII. Jahrhunderts und im Anfang des XIX. auch in Frankreich merkliche Belebung.

D'Alembert [1717—1783] erklärt in einem seiner Aufsätze über Geometrie [1759]: „La definition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes paralleles sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de Géometrie.“ [1]) Er meint, daß durch eine gute Definition der geraden Linie beide Schwierigkeiten vermieden werden müßten. Er schlägt vor, Parallele zu einer gegebenen Geraden eine beliebige Gerade in der-

1) Vgl. D'Alembert: „*Mélanges de Litterature, d'Histoire et de Philosophie*“, t. V, § 11 [1759]. — Vgl. auch: „*Encyclopédie Méthodique Mathématique*“, t. II, p. 519, Artikel: *Parallèles* [1785].

selben Ebene zu nennen, die zwei gleich abstehende Punkte auf derselben Seite der Geraden verbindet. Diese Definition erlaubt unmittelbar die Parallelen zu konstruieren: aber man müßte beweisen, daß die Geraden äquidistant sind. Dieser Lehrsatz wurde von D'Alembert gleichsam als Herausforderung seinen Zeitgenossen vorgesetzt.

§ 24. De Morgan erzählt in seiner Sammlung von Paradoxien, daß Lagrange [1736—1813] gegen Ende seines Lebens eine Abhandlung über die Parallelen schrieb. Als er sie der französischen Akademie vorlegte, unterbrach er das Lesen mit dem Ausruf: „Il faut que j'y songe encore!" und behielt das Manuskript zurück.[1])

Überdies berichtet Hoüel, daß Lagrange in einer Unterhaltung mit Biot die Unabhängigkeit der sphärischen Trigonometrie vom euklidischen Postulat behauptet hat. Zur Bekräftigung dieser Behauptung kann hinzugefügt werden, daß Lagrange sich mit besonderem Interesse mit der sphärischen Trigonometrie[2]) beschäftigte, und daß er, wenn er nicht der Verfasser ist, so doch die Anregung zu einer Abhandlung gegeben hat: „*Sur les principes fondamentaux de la Mécanique*" [1760—1761][3]), worin D. de Foncenex eine Unabhängigkeitsfrage entwickelt, die der oben genannten der sphärischen Trigonometrie entspricht. Genau gesagt, Foncenex beweist, daß das analytische Gesetz für die Zusammensetzung sich schneidender Kräfte weder vom V. Postulat noch von irgend einem gleichberechtigten abhängt.[4])

---

1) A. de Morgan: „*Budget of Paradoxes*", p. 173. [London 1872].

2) Vgl. J. Hoüel: „*Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*", S. 84, Anmerkung [Paris, G. Villars, 1883].

3) Vgl. Lagrange: *Oeuvres*, t. VII, S. 331—363.

4) Vgl. Kap. VI.

§ 25. Der als grundlegend schon von Wallis 1663 [vgl. § 8] gebrauchte Begriff der Ähnlichkeit erscheint wieder um den Anfang des XIX. Jahrhunderts, gestützt auf die Autorität zweier großen Geometer: L. N. M. Carnot [1753—1823] und Laplace [1749—1827].

In einer Anmerkung [S. 481] zu seiner „*Géométrie de Position*" [1803] behauptet Carnot, daß die Parallelentheorie mit dem Begriff der Ähnlichkeit verknüpft ist, die nahezu ebenso selbstverständlich ist wie die Gleichheit, und daß es, wenn man einmal diesen Begriff zugegeben hat, leicht ist, die fragliche Theorie streng zu begründen.

Nachdem Laplace [1824] die Bemerkung gemacht hat, daß das Newtonsche Gesetz [das allgemeine Anziehungsgesetz] wegen seiner Einfachheit, wegen seiner Allgemeinheit und wegen seiner Übereinstimmung mit den physischen Erscheinungen als streng betrachtet werden muß, bemerkt er, daß es eine seiner wichtigsten Eigenschaften ist, daß, wofern die Abmessung aller Körper des Weltalls, ihre gegenseitigen Entfernungen und ihre Geschwindigkeit im Verhältnis abnehmen würden, die Himmelskörper vollkommen den von ihnen beschriebenen Bahnen ähnliche beschreiben würden, derart, daß das Weltall, wenn es sich nach und nach auf den denkbar kleinsten Raum zusammenzöge, immer den Beobachtern denselben Anblick bieten würde. Dieser Anblick, so fährt er fort, ist also unabhängig von den Abmessungen des Weltalls, so daß die Einfachheit der Naturgesetze dem Beobachter nur die Verhältnisse zu erkennen gestattet. An diesen astronomischen Raumbegriff anknüpfend fügt er in einer Anmerkung hinzu: „Die Versuche der Geometer, das Postulat Euklids über die Parallelen zu beweisen, waren bisher wertlos. Allerdings hegt niemand Zweifel an diesem Postulat und den Lehrsätzen, die Euklid daraus abgeleitet hat. Der Begriff des

Raumes schließt also eine besondere Eigenschaft ein, die an sich selbstverständlich ist, und ohne die man die Eigenschaften der Parallelen nicht streng begründen kann. Die Vorstellung der begrenzten Ausdehnung z. B. des Kreises enthält nichts, was von seiner absoluten Größe abhängt. Verkleinern wir jetzt in Gedanken seinen Halbmesser, so werden wir unbezwinglich dazu gebracht, im selben Verhältnis seinen Umfang und die Seiten aller einbeschriebenen Figuren zu verkleinern. Diese Proportionalität scheint mir ein natürlicheres Postulat zu sein als das von Euklid, und es ist richtig, daß man es bei den Ergebnissen der allgemeinen Gravitation wiederfindet. [1])

§ 26. Zusammen mit den vorhergehenden Geometern pflegt man auch an J. B. Fourier [1768—1830] zu erinnern, wegen einer Auseinandersetzung, die er mit Monge über die gerade Linie hatte. [2]) Will man diese Erörterung mit den Untersuchungen über die Parallelen in Zusammenhang bringen, so braucht man nur auf den von D'Alembert ausgesprochenen Gedanken zu verweisen, daß der Beweis des Postulats mit der Definition der Geraden verknüpft werden kann. [Vgl. § 23.]

Fourier, der als ursprünglich den Begriff des Abstands zwischen zwei Punkten annimmt, schlägt vor, zuerst die Kugel zu definieren, dann die Ebene als Ort der Punkte, die von zwei gegebenen Punkten gleichen Abstand haben[3]), dann die Gerade, als Ort der Punkte,

---

1) Vgl. Laplace: „*Oeuvres*", t. VI, libre V, ch. V, p. 72.

2) Vgl.: „*Séances de l'École normale*", Débats, t. I, p. 28—33 [1795]. Die Diskussion wurde wieder abgedruckt in *Mathésis* t. IX, S. 139—141 [1883].

3) Diese Definition der Ebene wurde von Leibniz ungefähr ein Jahrhundert zuvor gegeben. Vgl. z. B. die „*Opuscules et fragments inédits*", veröffentlicht von L. Couturat, p. 554—5 [Paris, Alcan, 1903].

die von drei gegebenen Punkten gleichen Abstand haben. Diese Art, die Aufgabe der Grundlagen der Geometrie darzustellen, stimmt überein mit den Gedanken, die in der Folge von andern Geometern ausgesprochen wurden, die sich ausdrücklich mit der Parallelenfrage beschäftigten [W. Bolyai, N. Lobatschefsky, de Tilly]. In diesem Sinne findet die Erörterung zwischen Fourier und Monge ihren Platz unter den ersten Urkunden, welche sich auf die nichteuklidische Geometrie beziehen.[1])

Adrien Marie Legendre [1752—1833].

§ 27. Die ebengenannten Geometer beschränken sich darauf, die Schwierigkeit aufzudecken und Urteile über das Postulat auszusprechen; Legendre dagegen war es, der dies in einen Lehrsatz zu verwandeln suchte; seine Untersuchungen, die in den verschiedenen Auflagen seiner „*Eléments de Géométrie*“ [1794—1823] verteilt sind, sind gesammelt in den „*Reflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle*“. [Mém. Académie Sciences, Paris, t. XIII, 1833.]

Mit hochinteressanten Versuchen greift Legendre wie schon Saccheri die Frage von der Seite der Winkelsumme im Dreieck an, indem er von der Summe beweisen will, daß sie zwei rechten Winkeln gleich ist.

Es gelingt ihm zu diesem Zweck schon von Anfang an Saccheris Hypothese des stumpfen Winkels auszumustern, indem er feststellt, daß „in jedem Dreieck die Summe der Winkel kleiner [Hyp. d. spitzen W.]

---

1) Wir fügen hinzu, daß spätere Arbeiten und Untersuchungen zeigten, daß auch Fouriers Definition nicht gestattet, die euklidische Parallelentheorie ohne die Hilfe des V. Postulats oder eines andern gleichberechtigten Postulats zu schaffen.

oder gleich [Hyp. d. rechten W.] zwei rechten Winkeln ist“.

Wir geben einen einfachen und eleganten Beweis von Legendre wieder.

Es seien (Fig. 27) auf einer Geraden n aufeinanderfolgende gleiche Abschnitte A_1A_2, $A_2A_3 \cdots A_nA_{n+1}$ gegeben und über ihnen auf derselben Seite der Geraden n gleiche Dreiecke konstruiert, deren dritte Ecken die Punkte $B_1B_2 \cdots B_n$ sind.

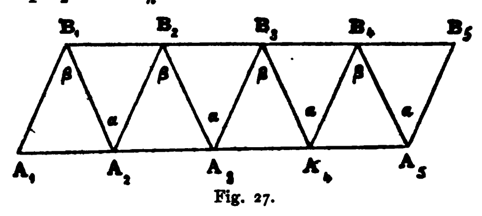


Fig. 27.

Die Strecken B_1B_2, B_2B_3, $\cdots B_{n-1}B_n$, die diese letztern Ecken verbinden, sind gleich und können als Grundlinien von n weiteren gleichen Dreiecken betrachtet werden: $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3 \cdots B_{n-1}A_nB_n$. Man ergänze die Figur durch das Dreieck $B_nA_{n+1}B_{n+1}$, das den früheren gleich ist.

Bezeichnet man mit β den Winkel des Dreiecks $A_1B_1A_2$ in B_1 und mit α den Winkel des folgenden Dreiecks in A_2, so behaupte ich, es ist $\beta \leqq \alpha$. In der Tat, wäre $\beta > \alpha$, so würde aus dem Vergleich der beiden Dreiecke $A_1B_1A_2$ und $B_1A_2B_2$, die zwei gleiche Seiten haben, folgen, daß $A_1A_2 > B_1B_2$.

Überdies hätte man, da die gebrochene Strecke $AB_1B_2 \cdots B_{n+1}A_{n+1}$ größer ist als die Strecke A_1A_{n+1}:

$$A_1B_1 + (B_1B_2)n + A_{n+1}B_{n+1} > (A_1A_2)n,$$

also

$$2\,A_1B_1 > (A_1A_2 - B_1B_2)n.$$

Aber diese Ungleichheit widerspricht bei hinreichend

großem n dem Postulat des Archimedes, deshalb kann nicht $A_1A_2 > B_1B_2$ sein, und folglich ist die Voraussetzung $\beta > \alpha$ absurd. Es folgt $\beta \leqq \alpha$, woraus man sofort erhält, daß die Summe der drei Winkel im Dreieck $A_1B_1A_2$ kleiner oder gleich ist zwei rechten Winkeln.

Diesen Lehrsatz pflegt man unberechtigterweise den ersten Legendreschen Lehrsatz zu nennen. Wir sagen unberechtigterweise, weil Saccheri mit seinem Beweis der Falschheit der Hyp. d. stumpfen W. fast ein Jahrhundert früher diesen Lehrsatz begründet hatte. [Vgl. S. 40.]

Der sogenannte zweite Legendresche Lehrsatz, der auch von Saccheri, und zwar in allgemeinerer Gestalt angegeben ist [vgl. S. 31], ist folgender:

Wenn in einem einzigen Dreieck die Summe der Winkel kleiner oder gleich zwei rechten Winkeln ist, so ist sie entsprechend kleiner oder gleich zwei rechten Winkeln in jedem andern Dreieck.

Wir geben den Beweis dieses Satzes nicht wieder, weil er nicht wesentlich verschieden ist von dem Saccheris.

Hier wollen wir vielmehr zeigen, wie Legendre beweist, daß die Summe der drei Winkel eines Dreiecks zwei rechten Winkeln gleich ist.

Fig. 28.

Im Dreieck ABC (Fig. 28) nehme man an, es sei

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C < 2 \text{ Rechte}.$$

Nachdem D auf der Seite AB fest angenommen ist, ziehe man die Transversale DE so, daß der Winkel $\sphericalangle ADE$ dem Winkel $\sphericalangle B$ gleich ist. Im Viereck $DBCE$ ist die Summe der



Winkel kleiner als vier Rechte, also $\sphericalangle AED > \sphericalangle ACB$. Der Winkel des Dreiecks ADE bei E ist also eine wohlbestimmte [abnehmende] Funktion der Seite AD oder, was dasselbe ist, die Länge der Seite AD ist vollständig bestimmt, wenn man [in rechten Winkeln] die Maßzahl des Winkels E und der beiden Winkel A und B kennt. Aber dies Ergebnis ist nach Legendre widersinnig, weil die Länge einer Strecke keine Bedeutung hat, wenn man die Maßeinheit nicht kennt, auf die sie bezogen ist, und die Natur der Frage in keiner Weise auf eine derartige Einheit hinweist.

Daher fällt die Hypothese

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C < 2 \text{ Rechte},$$

und folglich wird man haben:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 2 \text{ Rechte}.$$

Aber aus dieser Gleichheit folgt leicht der Beweis des euklidischen Postulats.

Die Methode von Legendre ruht also auf dem Postulat von Lambert, das die Existenz einer absoluten Einheit verneint.

§ 28. In einem andern Beweis macht Legendre Gebrauch von der Voraussetzung: „Von einem beliebig im Innern eines Winkels angenommenen Punkt kann man immer eine Gerade ziehen, die die beiden Schenkel des Winkels trifft.[1]) Er verfährt so:

Es sei ABC ein Dreieck, in dem, wenn es möglich ist, die Summe der Winkel kleiner ist als zwei rechte Winkel.

---

1) Dieser Annahme hatte sich bereits J. F. Lorenz zu demselben Zweck bedient, vgl.: „Grundriß der reinen und angewandten Mathematik“. [Helmstedt 1791.]

Es sei:

$$2 \text{ Rechte} - \sphericalangle A - \sphericalangle B - \sphericalangle C = \alpha \text{ [Defekt]}$$

gesetzt und man konstruiere (Fig. 29) den Punkt A', der zu A symmetrisch liegt, i. b. auf die Seite BC. Der Defekt des neuen Dreiecks CBA' ist auch α. Sodann ziehe man kraft der oben ausgesprochenen Hypothese durch A' eine Transversale, die in B_1 und C_1 die Schenkel des Winkels $\sphericalangle A$ trifft. Der Defekt des Dreiecks AB_1C_1 ist, wie man leicht bestätigen kann, die Summe der Defekte der vier Dreiecke, die es zusammensetzen [vgl. auch Lambert S. 48], also größer als 2α. Wiederholt man vom Dreieck AB_1C_1 aus die vorhergehende Konstruktion, so wird man ein neues Dreieck erhalten mit einem Defekt größer als 4α. Nach n Schritten dieser Art hat man ein Dreieck konstruiert mit einem Defekt größer als $2^n\alpha$. Aber für hinreichend großes n ist $2^n\alpha > 2$ Rechte [archimedisches Postulat], was widersinnig ist. Es folgt: $\alpha = 0$, also $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 2$ Rechte.

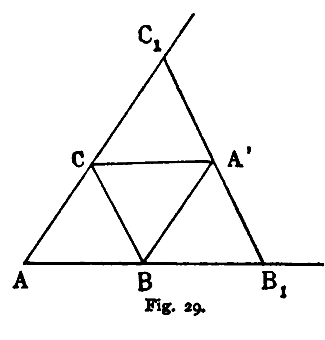


Fig. 29.

Dieser Beweis ist auf das archimedische Postulat gestützt. Hier noch eine Angabe, wie man den Gebrauch dieses Postulats vermeiden könnte: Es seien (Fig. 30) AB

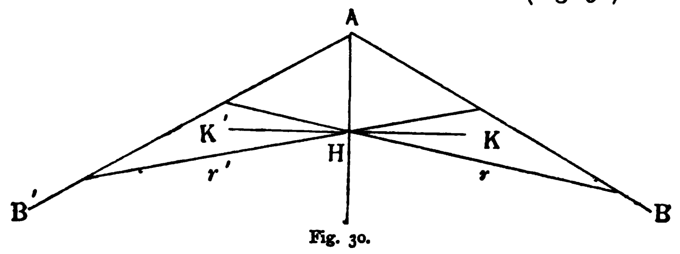


Fig. 30.

und *HK* eine Schräge und eine Senkrechte *AH*. Man konstruiere die Gerade *AB'* symmetrisch zu *AB* in bezug auf *AH*. Durch den Punkt *H* geht kraft der Legendreschen Hypothese eine Gerade *r*, die die beiden Schenkel des Winkels *BAB'* trifft. Wenn sie von *HK* verschieden ist, dann hat die i. b. auf *AH* symmetrische Gerade *r'* dieselbe Eigenschaft und folglich auch *HK*. Also treffen sich ein Lot und eine Schräge zur Geraden *AH* immer. Daraus folgt die gewöhnliche Theorie der Parallelen, also $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 2$ Rechte.

In andern Beweisen macht Legendre Gebrauch von analytischen Schlüssen und auch in irrtümlicher Weise von unendlichen Größen.

Mit diesen verschiedenartigen Arbeiten hielt Legendre schließlich die unentwirrbare Schwierigkeit für gelöst, die mit den Grundlagen der Geometrie verknüpft ist. In Wirklichkeit aber fügte er nichts wesentlich Neues hinzu zu dem bereits vorhandenen Material und zu den bereits von seinen Vorgängern gewonnenen Überzeugungen. Sein größtes Verdienst besteht in der einfachen und geschmackvollen Form, die er allen seinen Untersuchungen zu geben verstand, weshalb sie jene Verbreitung erreichten, die so viel zur Erweiterung des Kreises der Mitarbeiter an den neuen Gedanken beitrug, welche damals im Begriff waren zu entstehen.

Wolfgang Bolyai [1775—1856].

§ 29. In diesem Kapitel wird auch des ungarischen Geometers W. Bolyai gedacht, der sich seit seiner Göttinger Studienzeit [1796—99] mit der Parallelentheorie beschäftigte, wahrscheinlich auf Rat von Kästner und des jungen Professors der Astronomie K. F. Seyffer [1762—1822], mit dem er freundschaftlich verkehrte.

1804 schickte er an Gauß, seinen Göttinger Studienfreund, eine „*Theoria Parallelarum*", die einen Versuch

des Beweises der Existenz äquidistanter Geraden enthielt.[1]) Gauß widerlegte diesen Beweis. Bolyai hörte aber deswegen nicht auf, sich mit dem XI. Axiom zu beschäftigen, doch gelang es ihm nur das Axiom durch andere von größerer oder geringerer Selbstverständlichkeit zu ersetzen. So gelangte er dazu, an der Beweisbarkeit zu zweifeln und die Unmöglichkeit der Zurückführung der euklidischen Hypothese einzusehen, weil [wie er versichert] die aus der Verneinung des XI. Axioms abgeleiteten Folgerungen den Grundsätzen der Geometrie nicht widersprechen können, insofern, als die gemeinhin angenommenen Gesetze über den Schnitt zweier Geraden eine neue Tatsache darstellen, unabhängig von den andern ihnen vorausgehenden.[2])

Wolfgang sammelte seine Ansichten über die Grundlagen der Mathematik in dem Werk: „*Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseos* . . .“ [1832—35] und im besondern seine Untersuchungen über das Axiom XI, indem er bei jedem Versuch die neue Hypothese ins Licht setzte, die zur strengen Durchführung des Beweises nötig war.

Auf folgendes wichtige Postulat führt Wolfgang das euklidische zurück: Vier Punkte, die nicht auf einer Ebene liegen, liegen immer auf einer Kugel, oder, was dasselbe besagt: drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte gehören immer einem Kreise an.[3])

Man kann das euklidische Postulat so daraus ableiten:

---

1) Die „*Theoria Parallelarum*“ ist lateinisch und in deutscher Übersetzung veröffentlicht von den Herren Stäckel und Engel in Bd. XLIX der Math. Ann., S. 168—205 [1897].

2) Vgl. Stäckel: „Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch J. Bolyai“. Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn, t. XVII [1901].

3) Vgl. W. Bolyai: „Kurzer Grundriß eines Versuchs usw.“, S. 46. [Maros Vásárhely 1851].

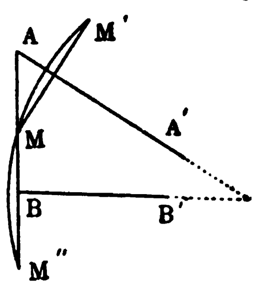


Fig. 31.

Seien (Fig. 31) AA', BB' zwei Gerade, die eine senkrecht, die andere schräg zu AB. Nimmt man den Punkt M auf der Strecke AB an, und die dazu symmetrisch gelegenen Punkte i. b. auf die Geraden AA', BB', so erhalten wir zwei Punkte $M'M''$, die nicht mit M in einer Geraden liegen. Diese drei Punkte gehören einem Kreisumfang an, und die beiden Geraden AA', BB', die alle beide durch den Mittelpunkt des Kreises gehen müssen, treffen einander.

Aber aus der Tatsache, daß ein Lot und eine Schräge zu derselben Geraden sich treffen, folgt ohne weiteres die Einzigkeit der Parallelen.

Friedrich Ludwig Wachter.

§ 30. Nachdem man eingesehen hatte, daß das euklidische Postulat von der Möglichkeit abhängt, einen Kreis durch drei beliebige nicht auf einer Geraden gelegene Punkte zu ziehen, ergab sich von selbst der Gedanke, die Existenz eines so beschaffenen Kreises zu beweisen, vor jeder Untersuchung über die Parallelen.

Ein Versuch in dieser Richtung wurde von F. L. Wachter gemacht.

Wachter, ein Schüler von Gauß in Göttingen [1809] und Professor der Mathematik am Gymnasium zu Danzig, beschäftigte sich zu wiederholten Malen mit dem Beweis des Postulats, und glaubte sein Ziel erreicht zu haben zuerst in einem Brief an Gauß [Dezember 1816] und dann in einem 1817 in Danzig gedruckten Werkchen [1]).

---

1) „*Demonstratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi*".

In dieser Veröffentlichung sucht er zu beweisen, daß durch vier beliebige Punkte im Raum [die nicht einer Ebene angehören] eine Kugel geht, wobei er sich auf das Postulat stützt: Vier Punkte im Raum bestimmen völlig eine Fläche [die Fläche der vier Punkte] und zwei solche Flächen schneiden sich in einer einzigen Linie, die durch drei Punkte völlig bestimmt ist.

Wir brauchen der Erwägung von Wachter nicht zu folgen, mit der er zu beweisen sucht, daß die Fläche der vier Punkte eine Kugel ist, weil, da in seinem Werkchen eine strenge Definition jener Fläche fehlt, seine Betrachtungen nur anschaulichen Charakter haben.

Besondere Aufmerksamkeit verdient aber eine Stelle in seinem Brief von 1816, die er nach einer Unterredung mit Gauß schrieb, wo von einer antieuklidischen Geometrie die Rede war.

In diesem Brief, wo von der Grenzfläche einer Kugel die Rede ist, deren Halbmesser ins Unendliche wächst, behauptet Wachter, daß auf ihr auch im Fall der Falschheit des V. Postulats eine Geometrie gelten würde, die mit der der gewöhnlichen Ebene identisch ist.

Diese Behauptung ist von größter Wichtigkeit, denn hier taucht eines der wichtigsten Ergebnisse auf, das in dem der Saccherischen Hypothese des spitzen Winkels entsprechenden geometrischen System gilt. [Vgl. Lobatschefskij, § 40.][1])

---

1) Über Wachter vgl. P. Stäckel: Friedrich Ludwig Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie; Math. Ann., Bd. LIV, S. 49—85 [1901]. In diesem Aufsatz sind die Briefe von Wachter über den Gegenstand wiedergegeben und das oben angeführte Werkchen von 1817.

Drittes Kapitel.

Die Begründer der nichteuklidischen Geometrie.

Karl Friedrich Gauß [1777—1855].

§ 31. Zwanzig Jahrhunderte unnützer Kraftanstrengung und vornehmlich die letzten fruchtlosen Untersuchungen über das V. Postulat brachten vielen Geometern, die am Anfang des vorigen Jahrhunderts wirkten, die Überzeugung bei, daß die endgültige Ordnung der Parallelentheorie eine unlösbare Aufgabe bildet. Die Göttinger Schule hatte seit 1763 amtlich die Notwendigkeit erklärt, sich der euklidischen Hypothese zu fügen, und dieser Gedanke, den Klügel in seiner Dissertation „*Conatuum* . . .“ [vgl. S. 46] ausgesprochen hatte, wurde geteilt und gestützt von seinem Lehrer A. G. Kästner, der damals Professor an der Universität Göttingen war.[1])

Nichtsdestoweniger war das Interesse für unsern Gegenstand immer lebendig, und wenn es auch nicht aufhörte, die nach dem angeblichen Beweis des Postulats Suchenden unnütz anzustrengen, so führte es doch schließlich zur Entdeckung neuer geometrischer Systeme, die auch ihrerseits, auf die Anschauung gestützt, sich in einem weiteren Gebiet entwickeln, da sie von dem im euklidischen Postulat enthaltenen Prinzip absehen.

Die volle Schwierigkeit in die neue Gedankenreihe einzutreten erscheint einem ganz deutlich, wenn man

1) Vgl. Stäckel und Engel: „Th. der P.“, S. 139—142.

sich in jene Zeit versetzt und an die damals herrschende Gedankenwelt der Kantschen Philosophie denkt.

§ 32. Gauß war der erste, der das klare Bild einer vom V. Postulat unabhängigen Geometrie hatte, ein Bild, das reichlich fünfzig Jahre lang im Geist des gewaltigen Mathematikers ruhte und erst ans Licht kam nach den Werken von Lobatschefskij [1829—30] und J. Bolyai [1832].

Die Urkunden, die eine angenäherte Wiederherstellung der Gaußschen Untersuchungen über die Parallelen gestatten, sind der Briefwechsel von Gauß mit W. Bolyai, Olbers, Schumacher, Gerling, Taurinus, Bessel [1799—1844]; zwei kleine Bemerkungen in den „Gött. gelehrten Anzeigen" [1816, 1822] und einige Notizen, die unter seinen Papieren gefunden wurden [1831].[1]

Stellt man verschiedene Stellen in Briefen von Gauß einander gegenüber, so kann man als Ausgangspunkt seiner Meditationen das Jahr 1792 festlegen.

Das folgende Stück eines Briefes an W. Bolyai [16. Dezember 1799] beweist, daß Gauß, wie schon Saccheri und Lambert, versuchte das V. Postulat zu beweisen, indem er als Hypothese seine Ungültigkeit annahm.

„Ich selbst bin in meinen Arbeiten darüber weit vorgerückt, allein der Weg, den ich eingeschlagen habe, führt nicht sowohl zu dem Ziele, das man wünscht, und das Du erreicht zu haben versicherst[2]), als vielmehr dahin, die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft zu machen.

„Zwar bin ich auf manches gekommen, was bei den

---

1) Vgl. Gauß „Werke", Bd. VIII, S. 157—268.

2) Man erinnere sich, daß W. Bolyai sich in Göttingen mit dem Gegenstand beschäftigte und das Hindernis überwunden zu haben glaubte. Vgl. § 29.

meisten schon für einen Beweis gelten würde, aber was in meinen Augen so gut wie nichts beweist.

„Zum Beispiel, wenn man beweisen könnte, daß ein geradliniges Dreieck möglich sei, dessen Inhalt größer wäre als eine jede gegebene Fläche, so bin ich imstande die ganze Geometrie völlig strenge zu beweisen.

„Die meisten würden nun wohl jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht; es wäre ja wohl möglich, daß, so entfernt man auch die drei Eckpunkte des Dreiecks im Raume voneinander annähme, doch der Inhalt immer unter (infra) einer gegebenen Grenze wäre."

1804 drückt er dann in seiner Antwort an W. Bolyai über die „*Theoria parallelarum*" die Hoffnung aus, daß die Klippen, gegen die seine Untersuchungen gestoßen sind, schließlich doch den Weg freilassen.

Aus alledem entnehmen die Herren Stäckel und Engel, die den Briefwechsel von Gauß sammelten und mit Urkunden belegten, daß der „summus geometra" die Existenz einer logisch unanfechtbaren nichteuklidischen Geometrie nicht durch geniale Intuition erkannte, sondern, daß er im Gegenteil sich langer und mühsamer Arbeit hingeben mußte, bevor er das alte Vorurteil überwunden hatte!

Kannte Gauß im ersten Zeitabschnitt seiner Untersuchungen die Werke von Saccheri und Lambert? Welchen Einfluß übten sie auf seine Tätigkeit aus? Prof. Segre bemerkt in seinen oben [S. 46, Anm. 1] angeführten „*Congetture*", daß sowohl Gauß wie W. Bolyai während ihres Aufenthalts in Göttingen [der erste von 1795—98, der zweite von 1796—99] sich mit den Parallelen beschäftigten. Es ist daher möglich, daß sie durch Vermittlung von Kästner und Seyffer, zwei gründlichen Kennern dieses Gegenstandes, auch zur Kenntnis des „*Euclides ab omni naevo vindicatus*" und der „Theorie der Parallellinien" gelangten, aber die

geschichtlichen Daten, die man besitzt, sprechen zwar nicht gegen diese Vermutung, bekräftigen sie jedoch nicht völlig.

§ 33. Auf diesen ersten Abschnitt von Gauß' Arbeit folgt ein zweiter, nach 1813, der besonders deutlich wird durch einige Briefe, einen an Wachter [1816], andere an Gerling [1819], Taurinus [1824] und Schumacher [1831], und aus Notizen, die in den Papieren von Gauß aufgefunden sind.

Diese Urkunden zeigen uns, daß Gauß in diesem zweiten Abschnitt die Unschlüssigkeit überwand und fortschritt in der Entwicklung der Hauptlehrsätze einer neuen Geometrie, die er erst die anti-euklidische [vgl. den auf S. 65 angeführten Brief von Wachter], dann Astralgeometrie [nach Schweikart, vgl. S. 76], endlich nichteuklidische [vgl. den Brief an Schumacher] nennt. So gelang es ihm, die Gewißheit zu erobern, daß die nichteuklidische Geometrie in sich keinen Widerspruch hat, wenngleich ihre Ergebnisse beim ersten Anblick den Anstrich des Paradoxen haben [Brief an Schumacher, 12. Juli 1831].

Allerdings ließ Gauß nichts von diesen Gedanken durchsickern in der Gewißheit, nicht verstanden zu werden [er fürchtete „das Geschrei der Böotier"; Brief an Bessel, 27. Januar 1829]: nur einigen bewährten Freunden vertraut er etwas von seinen Untersuchungen an, und als er durch den Zwang der Dinge genötigt ist, an Taurinus [1824] zu schreiben, bittet er ihn, das Stillschweigen über die ihm gemachten Mitteilungen zu bewahren.

Die in den Manuskripten von Gauß gefundenen Notizen enthalten einen kurzen Wink über die neue Parallelentheorie, und sollten zu einer beabsichtigten Darlegung der nichteuklidischen Geometrie gehören,

über die er [17. Mai 1831] an Schumacher schrieb: „Von meinen eignen Meditationen, die zum Teil schon gegen 40 Jahre alt sind, wovon ich aber nie etwas aufgeschrieben habe, und daher manches drei- oder viermal von neuem auszusinnen genötigt gewesen bin, habe ich vor einigen Wochen doch einiges aufzuschreiben angefangen. Ich wünschte doch, daß es nicht mit mir unterginge.“

§ 34. Gauß definiert die Parallelen so:

Wenn (Fig. 32) die Geraden *AM*..., *BN*... einander nicht schneiden, jede durch *A* zwischen *AM*... und *AB*... gelegte Gerade hingegen die *BN*... schneidet: so heißt *AM*... mit *BN*... parallel.

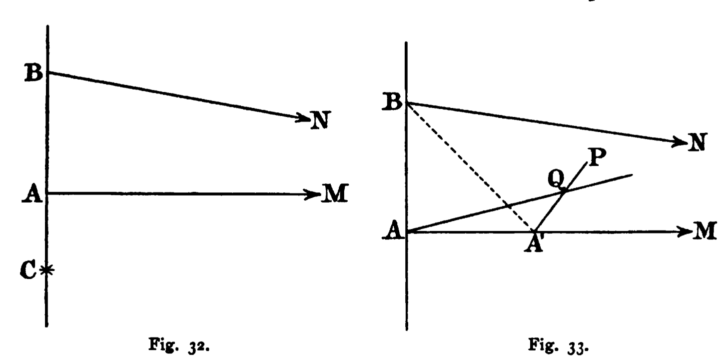


Fig. 32. Fig. 33.

Man beachte den Unterschied zwischen dieser Definition und der Euklids. In der Tat, verzichtet man auf das V. Postulat, so könnten durch *A* verschiedene Gerade *AM* gehen, die *BN* nicht treffen und die nur nach der antiken Definition Parallelen sein würden.

Bei der Gaußschen Definition scheint der Punkt *A* eine besondere Bedeutung zu haben, weshalb man notwendig beweisen muß, daß die Parallele *AM* von *A* unabhängig ist.

Diese Unabhängigkeit beweist Gauß folgendermaßen:

Nimmt man (Fig. 33) anstatt A einen andern Anfangspunkt A' auf der Linie $AM\ldots$, zieht durch A' zwischen $A'M\ldots$ und $A'B$ die Gerade $A'P$ in beliebiger Richtung, und durch einen Punkt Q zwischen A' und P die Gerade $AQ\ldots$, so wird solche (Definition) die $BN\ldots$ schneiden, woraus von selbst klar ist, daß auch $QP\ldots$ die $BN\ldots$ schneiden wird.

Nimmt man (Fig. 34) aber A' auf der rückwärts fortgesetzten $AM\ldots$ und zieht durch A' zwischen $A'M\ldots$ und $A'B\ldots$ in beliebiger Richtung die Gerade $A'P$,

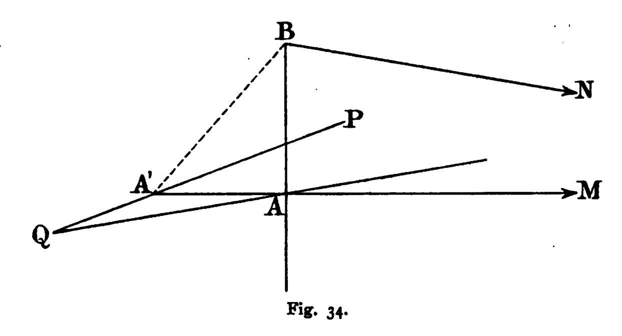


Fig. 34.

verlängert solche rückwärts und nimmt darauf einen beliebigen Punkt Q, so wird $QA\ldots$ die $BN\ldots$ schneiden (Definition), z. B. in R. $A'P$ ist also in der geschlossenen Figur $A'ARB$ und wird daher eine der vier Seiten $A'A$, AR, RB, BA' schneiden, offenbar muß dies aber die dritte RB sein, daher also auch $A'M\ldots$ mit $BN\ldots$ parallel ist.

Aus der Definition der Parallelen ergibt sich auch nicht von selbst die Gegenseitigkeit des Parallelismus, das will sagen, daß auch BN zu AM parallel ist. Diese Eigenschaft ist der Gegenstand des folgenden schönen Beweises von Gauß. (S. Fig. 35.)

„Es ist verstattet $ab*$ und $cd*$ zu vertauschen."

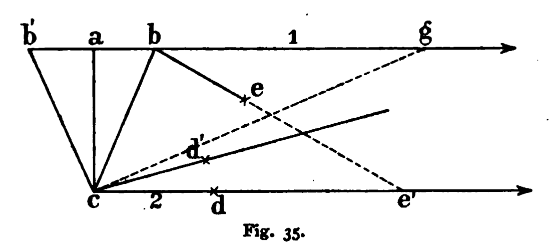


Fig. 35.

Es sei (Fig. 35) 1 und 2 parallel. Wäre nun nicht 2 mit 1 parallel, so sei cd' mit 1 parallel. Es sei ca senkrecht auf 1 und

$$acb = acb' = \tfrac{1}{2}\, dcd'.$$

Ferner $cbe = cb'b$. Es wird also be die 2 schneiden in e'. Macht man nun $b'g = be'$, so wird cg und cd' mit cb' einerlei Winkel machen, welches absurd ist.

Schließlich beweist er, daß zwei zu einer dritten parallele Gerade zueinander parallel sind (Transitivität).

Lehrsatz. Ist die Gerade 1 sowohl mit 2 als mit 3 parallel, so ist auch 2 mit 3 parallel.

Beweis: Erster Fall, wenn (Fig. 36) 1 zwischen 2 und 3 liegt. Es seien A, B Punkte auf 2 und 3 und

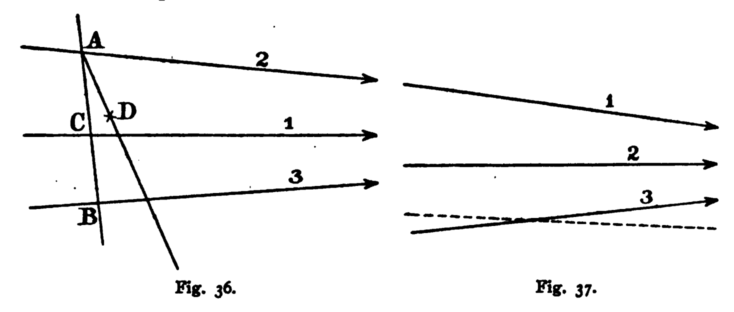


Fig. 36. Fig. 37.

AB schneide die 1 in C. Durch A ziehe man eine beliebige Gerade $AD\ldots$ zwischen 2 und AB, welche

also 1 schneiden wird; da dieses von jeder *AD*... gilt, so ist 2 mit 3 parallel.

Zweiter Fall, wenn (Fig. 37) 1 außerhalb 2 und 3 liegt. Es liege 2 zwischen 1 und 3. Wäre 2 mit 3 nicht parallel, so läßt sich durch einen beliebigen Punkt von 3 eine von 3 verschiedene Gerade ziehen, die mit 2 parallel ist. Diese ist also vermöge des ersten Falls auch mit 1 parallel, welches absurd ist.

Hier ist zu bemerken, das Gauß stillschweigend meint den Parallelismus in einem gegebenen Sinn. In der Tat, seine Definition der Parallelen betrachtet die von *A* auf einem bestimmten Ufer der Transversale *AB*, z. B. dem rechten, ausgehenden Strahlen, so zwar, daß man *AM* die Parallele zu *BN* nach rechts hin nennen müßte. Die Parallele zu *BN* nach links hin ist nicht notwendig *AM*, diese Voraussetzung würde vielmehr auf eine dem euklidischen Postulat äquivalente Hypothese hinauskommen.

Kommen wir auf den oben ausgesprochenen Satz zurück, so ist klar, daß die beiden zu einer dritten parallelen Geraden als Parallele in demselben Sinn anzunehmen sind.

Endlich gibt Gauß den Begriff der korrespondierenden Punkte auf zwei Parallelen *AA'*, *BB'*. Die Punkte *A* und *B* heißen korrespondierend, wenn die Gerade *AB* mit den beiden Parallelen auf derselben Seite gleiche innere Winkel bildet [Fig. 38].

Wenn dann *CC'* eine dritte Parallele ist in dem Sinn, wie die beiden andern parallel sind, und wenn *C* und *B* korrespondierende Punkte sind, dann sind auch *A* und *C* korrespondierende Punkte.

Der Begriff der korrespondierenden Punkte erlaubt uns, auf den Fall übertragen, wo die Geraden *AA'*, *BB'* *CC'* (Fig. 39) einem Büschel angehören [d. h. durch einen Punkt gehen], den Kreis zu definieren als Ort

der einem gegebenen Punkt korrespondierenden Punkte auf den Geraden eines Büschels. Aber dieser Ort kann auch konstruiert werden, wenn die

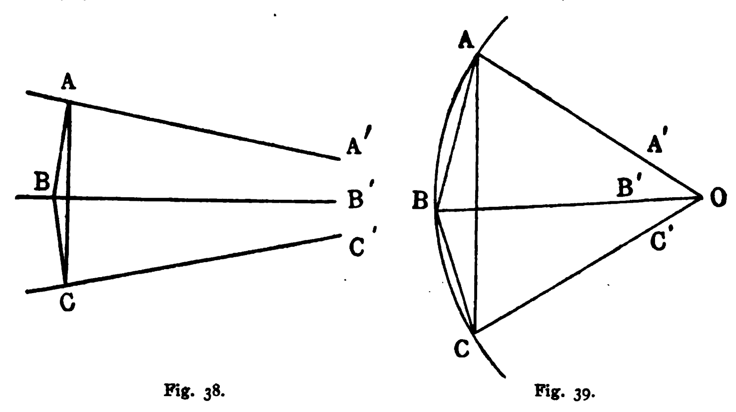


Fig. 38. Fig. 39.

Geraden des Büschels parallel sind. Im euklidischen Fall erhält man eine Gerade; merzt man die euklidische Hypothese aus, so ist der fragliche Ort eine Linie, die zwar viele Eigenschaften mit dem Kreis gemein hat, aber doch kein Kreis ist. Auch gehören drei ihrer Punkte niemals einem Kreis an. Besagte Linie kann als Grenzfall eines Kreises aufgefaßt werden, dessen Halbmesser ins Unendliche wächst.

Gauß ging nicht weiter mit der Abfassung, weil er 1832 das Werk von Johann Bolyai über die absolute Geometrie kennen lernte.

Aus Briefen vor und nach der unterbrochenen Redaktion wissen wir noch, daß Gauß in seiner Geometrie eine absolute Längeneinheit entdeckt hatte [vgl. Lambert, Legendre] und daß in seinen Formeln eine Konstante k erschien, mit deren Hilfe man jedes Problem lösen kann [Brief an Taurinus, 8. November 1824].

Schärfer gab er 1831 [Brief vom 12. Juli an

Schumacher] den Umfang des Kreises vom Radius r unter der Form:

$$\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right).$$

Hinsichtlich k sagt er, wofern man die neue Geometrie mit der Erfahrung in Einklang bringen will, müsse man sie unbegrenzt groß im Verhältnis zu allen meßbaren Größen annehmen.

Für $k = \infty$ wird der Gaußsche Ausdruck die gewöhnliche Länge des Kreisumfanges.[1]) Diese Bemerkung kann auf das ganze von Gauß entdeckte System ausgedehnt werden, ein System, das für $k = \infty$ als Grenzfall das des Euklid enthält.[2])

Ferdinand Karl Schweikart [1780—1859].

§ 35. Gleichzeitig mit und unabhängig von den Gaußschen Untersuchungen sind die des Professors der Jurisprudenz F. K. Schweikart[3]), der 1807 „Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie“ veröffentlichte.

---

1) Um das zu sehen, setze man für jede Exponentialfunktion ihre Reihenentwicklung. Dann hat man:

$$\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right) = 2\pi k\left(\frac{r}{k} + \frac{r^3}{k^3 \cdot 3!} + \frac{r^5}{k^5 \cdot 5!} \cdots\right)$$
$$= 2\pi r\left(1 + \frac{r^2}{k^2 \cdot 3!} + \frac{r^4}{k^4 \cdot 5!} \cdots\right).$$

Geht man zur Grenze $k = \infty$ über, so erhält man: $2\pi r$.

2) Über weitere Untersuchungen von Gauß vgl. die Anmerkung S. 93.

3) Er studierte Recht an der Universität Marburg und besuchte von 1796—1798 die mathematischen Vorlesungen, welche an der Universität Professor J. K. F. Hauff hielt, der Verfasser von mehreren Schriften über die Parallelen. S. „Th. der P.“, S. 243.

Sie enthält, im Gegensatz zu dem was der Titel vermuten läßt, keine Erörterung unabhängig vom V. Postulat, sondern eine Erörterung, die auf dem Begriff des Parallelismus beruht.

In der Folge entwickelte aber Schweikart, nachdem er in einen neuen Gedankenkreis gelangt war, eine Geometrie unabhängig von der Hypothese des Euklid. In Marburg übergab er im Dezember 1818 an Gerling ein Blatt für Gauß, das die folgenden Ankündigungen enthielt:

[Notiz.]

„Es gibt eine zwiefache Geometrie — eine Geometrie im engern Sinn —, die euklidische, und eine astralische Größenlehre.

„Die Dreiecke der letzteren haben das Eigene, daß die Summe der drei Winkel nicht zwei Rechten gleich ist.

„Dies vorausgesetzt, läßt es sich auf das strengste beweisen

a) daß die Summe der drei Winkel kleiner als zwei Rechte sei;
b) daß die Summe immer kleiner werde, je mehr Inhalt das Dreieck umfaßt;
c) daß die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks zwar immer zunimmt, je mehr man die Schenkel verlängert, daß sie aber eine gewisse Linie, die ich die 'Konstante' nenne, nicht übersteigen könne.

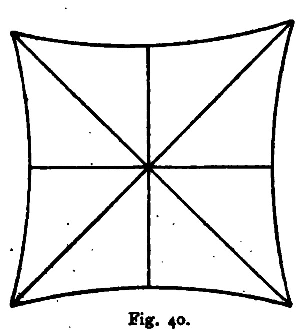


Fig. 40.

„Die Quadrate haben daher folgende Gestalt (Fig. 40).

„Ist diese Konstante für uns die halbe Erdachse (wonach jede im Weltraume von einem Fixstern zum andern, die 90° voneinander entfernt sind, ge-

zogene Linie eine Tangente der Erdkugel sein würde), so ist sie in Beziehung auf die, im täglichen Leben vorkommenden, Räume unendlich groß.

„Die euklidische Geometrie gilt nur unter der Voraussetzung, daß die Konstante unendlich groß sei. Nur dann ist es wahr, daß die drei Winkel eines jeden Dreiecks zwei Rechten gleich seien; auch läßt sich dieses, sowie man sich den Satz, daß die Konstante unendlich groß sei, geben läßt, leicht beweisen.“ [1])

Die Astralgeometrie von Schweikart und die nichteuklidische von Gauß entsprechen genau dem System von Saccheri und Lambert für die Hyp. d. spitzen W. Ja sogar der Inhalt der vorausgehenden Notiz leitet sich unmittelbar aus den Sätzen von Saccheri ab, die im „*Conatuum*“ von Klügel berichtet sind, und aus dem Satz von Lambert über den Flächeninhalt des Dreiecks. Und da Schweikart in seiner „Theorie“ von 1807 die Werke dieser letzteren zwei Verfasser anführt, wird der direkte Einfluß von Lambert und (wenigstens) der indirekte von Saccheri auf die Untersuchungen von Schweikart [1]) bestätigt. [2])

Im März 1819 antwortete Gauß an Gerling in betreff der Astralgeometrie, lobt Schweikart und erklärt seine Zustimmung zu allem, was das ihm geschickte Blättchen enthält. Er fügt hinzu, daß er die Astralgeometrie so weit ausgebildet hat, daß er alle Aufgaben vollständig lösen kann, sobald die Konstante von Schweikart gegeben ist. Er schließt, indem er die obere Grenze des Flächeninhalts eines Dreiecks unter der Form [3]):

---

1) Vgl. Bd. VIII der Werke von Gauß, S. 180—181.

2) Vgl. die oben S. 46 genannten „*Congetture*“ von Segre.

3) Die in diesem Ausdruck vorkommende Konstante C ist die Schweikartsche Konstante, nicht die von Gauß mit k bezeichnete, mittels deren er die Länge des Kreisumfangs ausdrückte.

$$\frac{\pi CC}{\{\log \text{hyp}\,(1+\sqrt{2})\}^2}$$

angibt. Schweikart veröffentlichte seine Untersuchungen nicht.

Franz Adolf Taurinus [1794—1874].

§ 36. Schweikart hat, außer daß er sich persönlich mit den Parallelen beschäftigte, noch [1820] seinen Neffen Taurinus veranlaßt, sich ihnen zu widmen; er lenkte seine Aufmerksamkeit auf die Astralgeometrie und auf das günstige Urteil von Gauß.

Erst 1824 scheint sich Taurinus ernsthaft mit der Sache beschäftigt zu haben, aber nicht mit den Ansichten des Onkels. Er war und blieb immer überzeugt von der Wahrheit des V. Postulats und nährte die Hoffnung, es beweisen zu können. Nachdem die ersten Versuche fehl geschlagen waren, nahm er die Bearbeitung der Frage unter dem Einfluß von Schweikart und Gauß wieder auf. 1825 veröffentlichte er eine „Theorie der Parallellinien", die keine euklidischen Entwicklungen enthielt, sondern die Widerlegung der Hyp. d. stumpfen W. und Untersuchungen ähnlich denen von Saccheri und Lambert bei der Hyp. d. spitzen W. So fand er die Konstante von Schweikart wieder, die er Parameter nannte, und, außerstande sich den Raum als einen Begriff vorzustellen, der verschiedenartigen Bestimmungen unterliegt, schloß er, daß gleichzeitig all die Systeme gelten müßten, die den unendlich vielen Werten des Parameters entsprechen. Diese Auffassung der Bedeutung des Parameters ver-

---

(Vgl. S. 76.) Die beiden Konstanten sind durch die folgende Beziehung verbunden:

$$k = \frac{C}{\lg(1+\sqrt{2})}.$$

anlaßte Taurinus auch die Hyp. d. spitzen W. zu verwerfen, obwohl er die logische Verträglichkeit der aus ihr folgenden Sätze erkannte.

Im folgenden Jahr veröffentlichte Taurinus seine „*Geometriae prima elementa*“ (Köln 1826), wo er wieder in besserer Form die Untersuchungen von 1825 auseinandersetzte. Die Schrift schließt dann mit einem sehr wichtigen Anhang, wo der Verfasser zeigt, wie man wirklich ein geometrisches System [analytisch] konstruieren kann, das der Hyp. d. spitzen W. entspricht.[1])

Zu diesem Zweck geht Taurinus von der Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie aus:

$$\cos\frac{a}{k} = \cos\frac{b}{k}\cdot\cos\frac{c}{k} + \sin\frac{b}{k}\sin\frac{c}{k}\cdot\cos\alpha,$$

und vertauscht darin den reellen Radius k mit dem imaginären ik [wo $i = \sqrt{-1}$]. Die von Taurinus erhaltene Formel kann mit Hilfe von Anwendung der hyperbolischen Funktionen[2]) in folgender Form geschrieben werden:

$$(1) \qquad Ch\frac{a}{k} = Ch\frac{b}{k}\,Ch\frac{c}{k} - Sh\frac{b}{k}\,Sh\frac{c}{k}\cos\alpha.$$

---

1) Was den etwa ausgeübten Einfluß von Saccheri und Lambert auf Taurinus betrifft, vgl. die auf S. 46 genannten „*Congetture*“ von Segre.

2) Zur Bequemlichkeit für den Leser erinnern wir an die analytische Definition und die Haupteigenschaften der hyperbolischen Funktionen:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} Shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots \\[2ex] Chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots \\[2ex] Thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad Cthx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{cases}$$

Bemerken wir weiter, daß die Kreisfunktionen $\sin x$, $\cos x$,

Das ist die Grundformel der logarithmisch-sphärischen Geometrie von Taurinus.

Man kann leicht beweisen, daß in der logarithmisch-sphärischen Geometrie die Winkelsumme im Dreieck kleiner als 180⁰ ist. Nehmen wir der Einfachheit halber das gleichseitige Dreieck und setzen in (1) $a = b = c$. Löst man dann noch $\cos \alpha$ auf, so hat man:

$$\cos \alpha = \frac{Ch^2 \frac{a}{k} - Ch \frac{a}{k}}{Sh^2 \frac{a}{k}} = \frac{Ch \frac{a}{k}}{1 + Ch \frac{a}{k}},$$

---

tang x ... auch ihrerseits einer analytischen Definition fähig sind, und zwar daß

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots \\ \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{i} \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}; \quad \operatorname{ctg} x = i \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}, \end{cases}$$

so sieht man leicht, daß die Kreisfunktionen und die hyperbolischen durch die folgenden Beziehungen verknüpft sind:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} i Sh x = \sin (ix); \qquad i Th x = \operatorname{tg} (x) \\ Ch x = \cos (ix); \quad - i Cth x = \operatorname{cotg} (ix). \end{cases}$$

Diese letzteren gestatten die Fundamentalformeln der Goniometrie in die entsprechenden für die hyperbolischen Funktionen umzuwandeln. Es sind dies folgende:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} Ch^2 x - Sh^2 x = 1 \\ Sh(x \pm y) = Sh x Ch y \pm Sh y Ch x \\ Ch(x \pm y) = Ch x Ch y \pm Sh x Sh y. \end{cases}$$

Aber:

$$Ch\frac{a}{k} = 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^4 + \cdots$$

also

$$(*) \qquad \cos\alpha = \frac{1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^4 + \cdots}{2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{k}\right)^4 + \cdots}$$

Dieser Bruch ist offenbar größer als 1 : 2, weswegen $\alpha < 60^0$ sein wird, also die Winkelsumme im Dreieck kleiner als 180^0.

Außerdem ist es angebracht zu beachten, daß

$$\lim_{a=0} \cos\alpha = \tfrac{1}{2},$$

das will sagen: die Grenze für α, wenn a sich der Null nähert, ist 60^0. Also nähert sich in der logarithmisch-sphärischen Geometrie die Winkelsumme 180^0, wenn die Seiten sich der Null nähern.

Über die Formel (*) ist auch folgende Bemerkung zu machen:

$$\operatorname*{limes}_{k=\infty} \cos\alpha = \tfrac{1}{2}$$

oder: mit unendlich wachsendem k wächst α bis zu 60^0. Also: Nimmt man die Konstante k unendlich groß, so wird der Winkel des gleichseitigen Dreiecks 60^0, wie in der gewöhnlichen Geometrie.

Allgemeiner könnte man sehen, daß (1) für $k = \infty$ wird:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha,$$

das ist die Grundformel der Trigonometrie der euklidischen Ebene. Es ist nützlich, dies Ergebnis neben die Behauptungen von Gauß und Schweikart zu stellen.

§ 37. Die zweite Grundformel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cos\frac{a}{k}$$

ergibt bei einfacher Vertauschung des Kosinus mit dem hyperbolischen Kosinus die zweite Grundformel der log.-sphärischen Trigonometrie:

(2) $$\cos\alpha = -\cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\, Ch\frac{a}{k}.$$

Für $\alpha = 0$ und $\gamma = 90^0$ erhält man

(3) $$Ch\frac{a}{k} = \frac{1}{\sin\beta}.$$

Das dieser Formel entsprechende Dreieck (Fig. 41) hat einen Winkel Null und die beiden ihn einschließen-

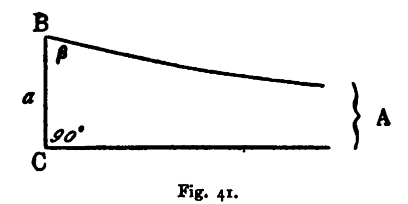


Fig. 41.

den Seiten sind von unendlicher Länge und parallel [asymptotisch]. Der Winkel β, der zwischen der einen parallelen Seite und der zu *CA* senkrechten Seite eingeschlossen ist, ist, wie aus (3) folgt, eine Funktion von *a*. Wir können ihn daher von jetzt an den Parallelwinkel nennen, der zur Distanz *a* gehört [vgl. Lobatschefsky, S. 90].

Für $\beta = 45^0$ wird die Strecke *BC*, deren Länge sich aus (3) berechnen läßt, die Konstante von Schweikart [vgl. S. 77]. Bezeichnen wir die Konstante mit *P*, so kommt

$$Ch\frac{P}{k} = \sqrt{2}$$

und daraus, wenn man nach P auflöst,

$$k = \frac{P}{\lg(1+\sqrt{2})}.$$

Diese Beziehung, welche die beiden Konstanten verbindet, wurde von Taurinus abgeleitet. Die Konstante k ist genau dieselbe, die Gauß braucht [vgl. S. 76], um den Kreisumfang auszudrücken.

§ 38. Immer durch Umformung der Formeln der sphärischen Trigonometrie, indem er nämlich den reellen Radius in den imaginären verwandelte, leitete Taurinus andere wichtige Lehrsätze der logarithmisch-sphärischen Geometrie ab, z. B. daß der Flächeninhalt eines Dreiecks seinem Defekt [Lambert, S. 48] proportional ist, daß die obere Grenze der fraglichen Fläche ist:

$$\frac{\pi P^2}{\{\log(1+\sqrt{2})\}^2} \quad \text{[Gauß, S. 79]},$$

daß der Umfang des Kreises vom Radius r ist:

$$2\pi k Sh\frac{r}{k} \quad \text{[Gauß, S. 76]},$$

daß der Flächeninhalt des Kreises gegeben ist durch

$$2\pi k^2\left(Ch\frac{r}{k} - 1\right),$$

daß Oberfläche und Rauminhalt der Kugel gegeben sind durch

$$4\pi k^2 Sh^2\frac{r}{k}$$

und

$$4\pi k^2\left(Sh\frac{r}{k}\cdot Ch\frac{r}{k} - \frac{r}{k}\right).$$

Wir wollen uns hier nicht bei den verschiedenen analytischen Entwicklungen aufhalten, weil das nichts zu

weiterer Erläuterung des Verfahrens beitragen würde. Wir wollen vielmehr nur bemerken, daß die Resultate von Taurinus die Vermutung von Lambert über seine dritte Hypothese bestätigen [vgl. S. 52], insofern als die Formeln der log.-sphär. Geometrie, analytisch gedeutet, die fundamentalen Beziehungen zwischen den Elementen eines Dreiecks ergeben, das auf einer Kugel von imaginärem Halbmesser gezeichnet ist.[1])

Wir fügen hinzu, daß Taurinus wie Lambert erkannte, daß die sphärische Geometrie genau dem bei der Hyp. d. stumpfen W. gültigen System entspricht; außerdem, daß die gewöhnliche Geometrie ein verbindendes Glied zwischen der sphärischen und der logarithmisch-sphärischen Geometrie bildet.

In der Tat, wenn k stetig vom reellen in das rein imaginäre Gebiet durch das Unendliche übergeht, kommt man vom sphärischen System in das logarithmisch-sphärische durch das des Euklid hindurch. Obwohl Taurinus, wie schon gesagt, die Möglichkeit einer logarithmisch-sphärischen Geometrie auf der Ebene ausschloß, so verkannte er doch das theoretische Interesse nicht, das sie bieten kann, und indem er die

1) Über diesen Punkt ist zu bemerken, daß Lambert gleichzeitig mit seinen Untersuchungen über die Parallelen sich mit den trigonometrischen Funktionen mit imaginärem Argument beschäftigte, deren Zusammenhang mit der nichteuklidischen Geometrie Taurinus ins Licht gesetzt hat. Es könnte sein, daß Lambert erkannt hat, daß die Formeln der sphärischen Geometrie eine reelle Form behalten, auch wenn man darin den reellen Radius in einen rein imaginären verwandelt. Damit hätte die Ahnung von Lambert über die Hyp. d. spitzen W. [vgl. S. 38] dann einen festen Boden. Übrigens berechtigt uns nichts zu dem Glauben, daß Lambert in der Tat seine Untersuchungen über die trigonometrischen Funktionen wirklich mit der Parallelentheorie in Zusammenhang gebracht hat. — Vgl. Stäckel: „Bemerkungen zu Lamberts Theorie der Parallellinien". Bibl. Math., S. 107—110 [1899].

Aufmerksamkeit der Geometer auf seine Formeln lenkte, scheint er die Existenz eines konkreten Falles vorauszusehen, wo sie eine Deutung finden.[1])

1) Die große Bedeutung von Schweikart und Taurinus für die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie wurde aufgedeckt und ins Licht gesetzt von den Herren Stäckel und Engel, die in der „Th. der P.“ ihnen ein ganzes Kapitel widmen [S. 237—286] und die wichtigsten Stellen der Werke von Taurinus wiedergeben, sowie einige Briefe, die zwischen ihm, Gauß und Schweikart gewechselt wurden. Man vergleiche noch den Artikel von Stäckel über „Franz Adolph Taurinus“, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik IX, S. 397—427 [1899].

Viertes Kapitel.

Die Begründer der nichteuklidischen Geometrie.

[Fortsetzung.]

Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij [1793—1856].[1])

§ 39. Lobatschefskij studierte Mathematik an der Universität Kasan unter der Leitung des Deutschen J. M. C. Bartels [1769—1836], der ein Freund und Landsmann von Gauß war; er promovierte 1813 und blieb an der Universität zuerst als Assistent, dann als Professor, wobei er dort alle Zweige der Mathematik und auch Physik und Astronomie lehrte.

1815 beschäftigte sich Lobatschefskij schon mit den Parallelen und in einem seiner Manuskripte zu den Vorlesungen von 1815—1817 finden sich einige Versuche zum Beweis des V. Postulats und Untersuchungen ähnlich denen von Legendre. Aber erst nach 1825 hat er die imaginäre Geometrie erdacht. Das geht aus einer geschriebenen Abhandlung von ihm über die elementare Geometrie hervor, wo gesagt wird, daß man keinen Beweis des V. Postulats besitzt, aber daß ein solcher Beweis nicht unmöglich sein kann.

---

1) Was historische und kritische Bemerkungen über Lobatschefskij betrifft, so verweisen wir ein für allemal auf den Band von F. Engel: „N. J. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers". [Leipzig, Teubner, 1899.]



Zwischen 1823 und 1825 richteten sich Lobatschefskijs Gedanken auf eine Geometrie, die unabhängig von der Hypothese des Euklid ist, und die erste Frucht seiner neuen Studien ist die „*Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles*", die er am 12. [24.] Februar 1826 der physiko-mathematischen Abteilung der Universität vorlegte. In dieser „Vorlesung", deren Manuskript nicht aufgefunden wurde, setzt Lobatschefskij die Anfangsgründe einer Geometrie auseinander, die allgemeiner ist als die gewöhnliche, bei der ferner durch einen Punkt zwei Parallele zu einer Geraden gehen und wo die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei rechte Winkel ist [Hyp. d. spitzen W. von Saccheri und Lambert].

1829—1830 gab er dann eine Abhandlung „Über die Anfangsgründe der Geometrie" in Druck[1]), die den Hauptteil seiner vorhergehenden „Vorlesung" enthielt, und weitere Anwendungen der neuen Theorie auf die Analysis. Der Reihe nach kamen dann heraus die „Imaginäre Geometrie" [1835][2]), die „neuen Anfangsgründe der Geometrie, mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien" [1835—1838][3]), die „Anwendungen der imaginären Geo-

---

1) Kasaner Bote [1829—1830]. — Geometrische Abhandlungen von Lobatschefskij [Kasan 1883—1886], Bd. I, S. 1—67. — Deutsche Übersetzung von F. Engel, S. 1—66 des S. 87 genannten Werkes.

2) Kasaner Gelehrte Schriften [1835]. — Geom. Abh., Bd. I, S. 71—120. — Deutsche Übersetzung mit Anmerkungen von H. Liebmann (Abh. z. Gesch. d. Math. XIX, Leipzig, Teubner, 1904, S. 3—50.

3) Kasaner Gelehrte Schriften [1835—1838]. — Geom. Abh., Bd. I, S. 219—486. — Deutsche Übersetzung von F. Engel, S. 67—235 seines S. 87 genannten Werkes.

metrie auf einige Integrale" [1836][1]), dann die „*Géométrie imaginaire*" [1837][2]) und 1840 das zusammenfassende Werkchen: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien"[3]), das in deutscher Sprache geschrieben ist und von Lobatschefskij bestimmt war, die Aufmerksamkeit der Geometer auf seine Untersuchungen zu lenken. Endlich diktierte und veröffentlichte er 1855 in französischer und russischer Sprache, ein Jahr vor seinem Tod und bereits erblindet, eine vollständige Auseinandersetzung seines geometrischen Systems unter dem Titel: „*Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles.*"[4])

§ 40. Die nichteuklidische Geometrie, gerade wie sie von Gauß und Schweikart um 1816 herum erdacht war, und wie sie von Taurinus unter der Form eines abstrakten Systems 1826 bearbeitet wurde, nahm um 1829—1830 allmählich teil am wissenschaftlichen Gemeingut.

---

1) Kasaner Gelehrte Schriften [1836]. — Geom. Abh., Bd. I, S. 121—218. — Deutsche Übersetzung von H. Liebmann, S. 51—130 des in Anm. 2 S. 88 genannten Buches.

2) Crelles Journal, Bd. XVII, S. 295—320. — Geom. Abh. II, S. 581—613.

3) Berlin [1840]. Neudruck 1887. — Geom. Abh. II, S. 553—578. — Französische Übersetzung von J. Hoüel, enthalten in den Mém. de Bordeaux IV [1866] und auch in den „*Recherches géométriques sur la théorie des parallèles*" [Paris, Hermann, 1900].

4) Sammlung gelehrter Abhandlungen, verfaßt von Professoren der kaiserlichen Universität Kasan zur Erinnerung an ihr fünfzigjähriges Bestehen, Bd. I, S. 279—340 [1856]. — Geom. Abh., Bd. II, S. 617—680. — Italienische Übersetzung von G. Battaglini im Giornale di Mat., T. V, S. 273—336 [1867]. — Deutsche Übersetzung von H. Liebmann, Leipzig 1902. (Sammlung von Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 130.) — Faksimile-Neudruck. Paris 1905.

Um möglichst kurz die von Lobatschefskij bei der Konstruktion der „Imaginären Geometrie“ oder der „Pangeometrie“ befolgte Methode anzudeuten, halten wir uns an seine „geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“ von 1840.

Lobatschefskij schickte darin eine Anzahl von Sätzen voraus, die von der Parallelentheorie unabhängig sind, und betrachtet dann auf der Ebene ein Büschel mit dem Stützpunkt A und eine Gerade BC, die nicht dazu gehört (Fig. 42). Es sei AD das dem Büschel angehörige Lot auf BC und AE senkrecht auf AD. Diese Gerade ist beim euklidischen System die einzige, die BC nicht schneidet. Bei der Lobatschefskijschen Geometrie gibt es im Büschel A noch andere Gerade, welche BC nicht schneiden: die nichtschneidenden sind von den schneidenden getrennt durch zwei Gerade h, k, die ihrerseits BC nicht treffen. (Vgl. Saccheri, S. 43.]

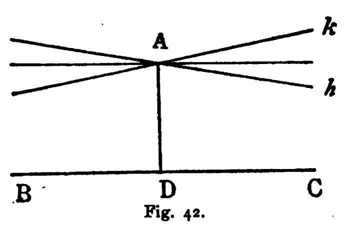


Fig. 42.

Von diesen Geraden, die der Verfasser Parallele nennt, hat jede einen bestimmten Sinn des Parallelismus: h in unserer Figur nach der rechten Seite, k nach der linken Seite. Der vom Lot AD mit einer der Parallelen gebildete Winkel heißt der Parallelwinkel, der dem Abstand AD entspricht. Lobatschefskij gebraucht das Symbol $\Pi(a)$, um den zum Abstand a gehörigen Parallelwinkel zu bezeichnen. In der gewöhnlichen Geometrie hat man beständig $\Pi(a) = 90^0$; bei Lobatschefskij ist $\Pi(a)$ eine wohlbestimmte Funktion von a, die bis 90^0 wächst, wenn a bis Null abnimmt, und die bis Null abnimmt, wenn a ins Unendliche wächst.

Aus der Definition der Parallelen leitet dann der Verfasser ihre Haupteigenschaften ab, d. h. die Erhaltung, die Gegenseitigkeit und die Transitivität des Parallelismus [vgl. Gauß, S. 72] und das asymptotische Verhalten der Parallelen. Dem Beweis dieser Eigenschaften gehen die Lehrsätze über die Winkelsumme eines Dreiecks voraus, dieselben, die schon von Lambert und noch früher von Saccheri angegeben wurden. Es steht übrigens fest, daß Lobatschefskij die Untersuchungen von Lambert gekannt hat.[1]

Aber der wichtigste Teil der „Imaginären Geometrie" ist der Aufbau der trigonometrischen Formeln.

Um sie abzuleiten, führte der Verfasser zwei neue Figuren ein: den Grenzkreis [Kreis von unendlichem Radius; vgl. Gauß, S. 75] und die Grenzkugel [Kugel von unendlichem Radius], die in der gewöhnlichen Geometrie die Gerade und die Ebene sind. Und da auf der Grenzkugel, der ∞^2 Grenzkreise angehören, eine der gewöhnlichen ganz entsprechende Geometrie aufgebaut werden kann, wobei die Grenzkreise an Stelle der Geraden treten, so erhält Lobatschefskij dies als erstes wichtiges Ergebnis: Auf der Grenzkugel gilt die euklidische Geometrie [vgl. Wachter, S. 66] und im besondern die gewöhnliche ebene Trigonometrie.

Dieser wichtigen Eigenschaften und einer Eigenschaft der koaxialen Grenzkreise [konzentrische Kreise von unendlich großem Radius] bedient sich Lobatschefskij, um die Formeln der neuen ebenen Trigonometrie und der sphärischen Trigonometrie abzuleiten.[2] Die letzteren

---

1) Vgl. seine Kritik von Legendres Beweisversuchen in den „Neuen Anfangsgründen" (S. 68 der Übersetzung von Engel).

2) Es läßt sich zeigen, daß die Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie in der Ebene allein, ohne Benützung der Grenzkugel bewiesen werden können, wobei nur die Formel gebraucht

fallen mit den gewöhnlichen Formeln für die Kugel zusammen, wobei übrigens die Elemente des Dreiecks in Winkelmaß gemessen werden.

§ 41. Es ist gut, sich die von Lobatschefskij seinen Formeln gegebene Gestalt zu merken. Bezeichnen wir im ebenen Dreieck ABC mit abc die Seiten, die ABC gegenüberliegen; mit $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ die Parallelwinkel, die zu den Seiten gehören, so ist die Hauptformel von Lobatschefskij:

$$\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1 . \tag{4}$$

Man kann leicht sehen, daß diese Formel und die von Taurinus [s. S. 81] ineinander überführbar sind.

Um von der Formel des Taurinus zu der des Lobatschefskij überzugehen, genügt es, von (3) S. 83 Gebrauch zu machen, wobei man noch zu bemerken hat, daß der darin vorkommende Winkel β gleich $\Pi(a)$ ist. Für den umgekehrten Übergang dient auch die folgende von Lobatschefskij gegebene Beziehung:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Pi(x) = a^{-x}, \tag{5}$$

die mit (3) von Taurinus übereinstimmt, nur von etwas anderer Gestalt ist.

Die Konstante a, die in (5) auftritt, ist unbestimmt: sie stellt das konstante Verhältnis von zwei koaxialen Grenzkreisbogen dar, die zwischen denselben Radien liegen und deren Abstand gleich der Maßeinheit ist (Fig. 43).

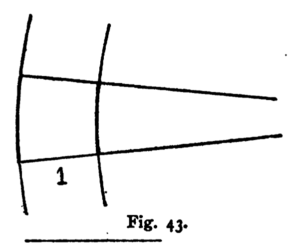


Fig. 43.

Wählt man mit Lobatschefskij eine passende Ein-

wird, welche die Beziehung zwischen zwei von denselben Achsen eingeschlossenen Grenzkreisbogen (s. S. 92) angibt. — S. Liebmann, Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie. Berichte der K. S. G. d. W., Math.-Phys. Klasse, Leipzig 1907.

heit, so kann man a gleich e annehmen, d. h. gleich der Basis der natürlichen Logarithmen. Will man dagegen die Ergebnisse von Lobatschefskij der log.-sphärischen Geometrie von Taurinus oder der nichteuklidischen von Gauß anpassen, so setze man:

$$a = e^{\frac{1}{k}}.$$

Dann wird die Formel (5)

$$(5') \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}},$$

oder was dasselbe ist

$$(6) \qquad Ch\frac{x}{k} = \frac{1}{\sin \Pi(x)}.$$

Durch diese Beziehung verwandelt sich die Formel (4) von Lobatschefskij unmittelbar in (1) von Taurinus. Also:

Die logarithmisch-sphärische Geometrie von Taurinus ist identisch mit der imaginären Geometrie (Pangeometrie) von Lobatschefskij.

§ 42. Folgende Ergebnisse sind die wichtigsten, die Lobatschefskij aus seinen Formeln ableitet:

a) Für Dreiecke mit sehr kleinen [unendlich kleinen] Seiten kann man an Stelle der Formeln der imaginären Trigonometrie wenigstens bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung die gewöhnlichen trigonometrischen Formeln setzen.[1])

1) Umgekehrt kann die Annahme der Gültigkeit der euklidischen Geometrie im Unendlichkleinen als Ausgangspunkt für die Ableitung der nichteuklidischen Geometrie benützt werden, und es ist eine der interessantesten Entdeckungen bei der erneuten Durcharbeitung des Gaußschen Nachlasses, daß schon der *Princeps mathematicorum* diesen Weg beschritten hat. (Vgl. Gauß' Werke VIII, p. 255—264.) — Auf diesem Prinzip ist das Werk von Flye St. Marie (Théorie analytique sur la

b) Die Vertauschung der Seiten *a*, *b*, *c* mit rein imaginären Seiten *ia*, *ib*, *ic* verwandelt die Formeln der imaginären Trigonometrie in die Formeln der sphärischen Trigonometrie.[1])

c) Führt man auf der Ebene oder im Raum ein Koordinatensystem ähnlich dem gewöhnlichen kartesianischen, so kann man mit den Methoden der analytischen Geometrie die Längen von Kurven, die Inhalte von Flächen, den Rauminhalt von Körpern berechnen.

§ 43. Wie mag wohl Lobatschefskij veranlaßt worden sein, sich mit den Parallelen zu beschäftigen und die imaginäre Geometrie zu entdecken?

Es wurde gesagt, daß Bartels, der Lehrer von Lobatschefskij in Kasan mit Gauß durch Freundschaft verbunden war [S. 87]: nimmt man jetzt hinzu, daß er mit Gauß in Braunschweig die beiden Jahre zubrachte, die seinem Ruf nach Kasan [1807] vorausgingen, und daß er dann mit Gauß in Briefwechsel stand, so ergibt sich von selbst die Vermutung, daß sie den Untersuchungen von Lobatschefskij nicht fern standen.

Wir sahen schon, daß Gauß vor 1807 versucht hatte, die Frage der Parallelen zu lösen, und daß seine Anstrengungen bis zu dieser Zeit nur die Hoffnung gezeitigt hatten, die Klippen überwinden zu können, gegen

---

théorie des parallèles. Paris 1871) und das von Killing (Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885) aufgebaut. Auch M. Simon hat, indem er außer einigen wenigen Grundbegriffen der nichteuklidischen Geometrie dieses Prinzip anwendete, die trigonometrischen Formeln auf sehr kurzem Wege abgeleitet. (M. Simon, die Trigonometrie in der absoluten Geometrie. Journal f. d. reine und angewandte Mathematik 109 (1892), S. 187—198.)

1) Dies Ergebnis rechtfertigt die von Taurinus beim Aufbau der log.-sphär. Geometrie befolgte Methode.

die ihn seine Untersuchungen getrieben hatten. Also alles, was Bartels von Gauß vor 1807 gelernt haben könnte, würde nur auf ein negatives Ergebnis zurückkommen. Was die späteren Ansichten von Gauß betrifft, so scheint ausgemacht, daß Bartels davon keine Nachricht hatte, so daß wir daran festhalten können, daß Lobatschefskij seine Geometrie unabhängig von irgend welchem Gaußschen Einfluß geschaffen hat.[1]) Andere Einflüsse kann man annehmen, z. B. außer Legendre die den Werken von Saccheri und Lambert entstammenden, die der russische Geometer vielleicht direkt oder durch Vermittlung von Klügel und Montucla möglicherweise gekannt hat. Aber man kann über diese Vermutung nichts Bestimmtes aussprechen.[2]) Auf jeden Fall veranlaßten entweder die verfehlten Beweise seiner Vorgänger oder die Nutzlosigkeit seiner ersten Untersuchungen [1815—1817] Lobatschefskij, wie schon Gauß, zu bedenken, ob die zu überwindende Schwierigkeit einen andern Grund hätte als bis dahin vermutet. Lobatschefskij spricht diesen Gedanken klar aus in den „Neuen Anfangsgründen der Geometrie“ von 1835, wo er sagt:

„Die Vergeblichkeit der Anstrengungen, die seit Euklids Zeiten während des Verlaufs zweier Jahrtausende gemacht worden sind, erweckte in mir den Verdacht, in den Begriffen selbst möchte noch nicht die Wahrheit liegen, die man hat beweisen wollen, und zu deren Betätigung wie bei andern Naturgesetzen, nur Versuche dienen können, so z. B. astronomische Beobachtungen. Als ich mich schließlich von der Richtigkeit meiner Vermutung überzeugt hatte und der Meinung war,

1) Vgl. Engel in dem auf S. 87 zitierten Werk: Zweiter Teil: „Lobatschefskijs Leben und Schriften“, Kap. VI, S. 343—383.

2) Vgl. die auf S. 43 angeführte „*Congetture*“ von Segre.

die schwierige Frage vollständig erledigt zu haben, schrieb ich im Jahre 1826 darüber eine Abhandlung" [*„Exposition succincte des principes de la Géométrie"*].[1])

Die Worte von Lobatschefskij lehren deutlich einen Raumbegriff, der dem Kantischen entgegengesetzt ist, welcher sich damals der größten Gunst erfreute. Die Kantische Lehre betrachtet den Raum als eine subjektive Anschauungsform, die notwendig aller Erfahrung vorausgeht; die von Lobatschefskij, die sich viel eher an den Sensualismus und an den gangbaren Empirismns anschließt, läßt die Geometrie in den Kreis der Erfahrungswissenschaften zurücktreten.[2])

§ 44. Es muß noch die Beziehung der Pangeometrie von Lobatschefskij und der aufgeworfenen Frage des euklidischen Postulats gegeben werden. Diese Frage zielt, wie wir sahen, darauf, die Theorie der Parallelen mit Hilfe der 28 ersten Sätze von Euklid abzuleiten.

Was diese Frage betrifft, so definiert Lobatschefskij den Parallelismus und weist ihm die charakteristischen Eigenschaften der Reziprozität und Transitivität zu. Die Eigenschaft des unveränderlichen Abstands zeigt sich dann Lobatschefskij in ihrem wahren Wesen. Weit davon entfernt, unlösbar mit den ersten 28 euklidischen Sätzen verbunden zu sein, schließt sie vielmehr ein neues Element ein.

Die Wahrheit dieser Behauptung folgt unmittelbar aus der Existenz der Pangeometrie [einer logischen deduktiven Wissenschaft, die sich auf den genannten ersten 28 Sätzen aufbaut und auf der Ablehnung des

---

1) S. 67 des genannten Werkes von Engel.

2) Vgl. die Rede von Wassiljef über Lobatschefskij [Kasan 1893]. — Deutsche Übersetzung von Engel, Zeitschr. f. Math. u. Phys. XI, S. 205—244 [1895].

V. Postulats] bei der die Parallelen nicht gleichen Abstand haben, sondern asymptotisch sind. Daß ferner die Pangeometrie eine logisch folgerichtige Wissenschaft ist, d. h. frei von inneren Widersprüchen, das erklärt sich nach Lobatschefskij durch Verweis auf die analytische Formulierung, deren sie fähig ist.

Lobatschefskij drückt sich am Schluß seines Werkes darüber so aus:

„Nachdem wir im vorhergehenden gezeigt haben, auf welche Weise man die Länge der gekrümmten Linien, den Flächeninhalt der Oberflächen und den Rauminhalt der Körper berechnen kann, dürfen wir behaupten, daß die Pangeometrie eine abgeschlossene geometrische Lehre ist. Ein einziger Blick auf die Gleichungen, welche die zwischen den Seiten und den Winkeln geradliniger Dreiecke bestehende Abhängigkeit ausdrücken, genügt, um zu beweisen, daß die Pangeometrie von hier an eine analytische Methode wird, welche die analytischen Methoden der gewöhnlichen Geometrie ersetzt und erweitert. Man könnte die Auseinandersetzung der Pangeometrie auch mit diesen Gleichungen beginnen und auch versuchen, an Stelle dieser Gleichungen andere zu setzen, welche die Abhängigkeit zwischen den Seiten und den Winkeln jedes geradlinigen Dreiecks ausdrücken würden; aber in diesem letzteren Falle müßte man beweisen, daß diese neuen Gleichungen mit den Grundbegriffen der Geometrie übereinstimmen. Die Grundgleichungen also, die aus diesen Grundbegriffen abgeleitet sind, stehen notwendig in Einklang mit ihnen, und alle Gleichungen, die man an ihre Stelle setzen wollte, müssen, wenn sie keine Folgen der Grundgleichungen sind, auf Ergebnisse führen, die diesen Grundbegriffen widersprechen. Unsere Gleichungen sind also die Grundlage der allgemeinsten Geometrie, weil sie nicht von der Voraussetzung abhängen, daß die

Summe der Winkel in jedem geradlinigen Dreieck zwei rechten Winkeln gleich ist.“ [1])

§ 45. Um etwas Bestimmtes auszusagen über die Konstante k, die versteckt in den Formeln von Lobatschefskij und ausdrücklich in den Formeln von Taurinus vorkommt, muß man die neue Trigonometrie auf einen wirklichen Fall anwenden. Zu dem Zweck benutzt Lobatschefskij ein rechtwinkliges Dreieck ABC, wo die Seite $BC = a$ der Erdbahnhalbmesser ist und A ein Fixstern senkrecht zur Richtung BC. (Vgl. Fig. 44.) Wir bezeichnen mit $2p$ die größte Parallaxe des Sterns A. Dann kommt

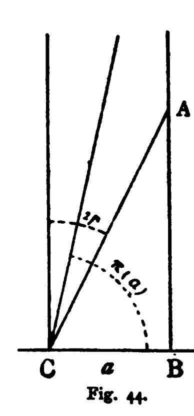


Fig. 44.

$$\Pi(a) > \sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2} - 2p,$$

woraus:

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2}\Pi(a) > \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1 - \text{tg}\, p}{1 + \text{tg}\, p}.$$

Aber

$$\text{tg}\, \tfrac{1}{2}\Pi(a) = e^{-\frac{a}{k}} \quad \text{[vgl. S. 92, 5]},$$

daher

$$e^{\frac{a}{k}} < \frac{1 + \text{tang}\, p}{1 - \text{tang}\, p}.$$

Wir haben dann bei der Annahme $p < \frac{\pi}{4}$

$$\frac{a}{k} = \lg \frac{1 + \text{tang}\, p}{1 - \text{tang}\, p} = 2\left(\text{tg}\, p + \tfrac{1}{3}\, \text{tg}^3 p + \tfrac{1}{5}\, \text{tg}^5 p + \cdots\right).$$

1) Vgl. die „Pangeometrie“ in der deutschen Übersetzung von Liebmann, S. 75. (Vgl. die Übersetzung von Battaglini, Giorn. di Mat., T. V, p. 334.)

Überdies weil

$$\mathrm{tg}\ 2p = \frac{2\ \mathrm{tg}\, p}{1 - \mathrm{tg}^2 p} = 2\,(\mathrm{tg}\, p + \mathrm{tg}^3 p + \mathrm{tg}^5 p + \cdots),$$

so wird endlich

$$\frac{a}{k} < \mathrm{tg}\ 2p.$$

Nimmt man mit Lobatschefskij für $2p$ die Parallaxe des Sirius, die 1″,24 beträgt, und führt man die Rechnung aus, so kommt:

$$\frac{a}{k} < 0{,}0000060012.$$

Dies Ergebnis gestattet uns nicht einen Wert für k anzugeben, aber uns zu vergewissern, daß er sehr groß ist im Vergleich mit dem Erddurchmesser. Man könnte die Rechnung mit viel kleineren Parallaxen wiederholen, z. B. mit 0″,1, wobei man k größer als das Millionfache des Erdbahnhalbmessers findet.

Damit im wirklichen Raum die euklidische Geometrie und folglich das V. Postulat gilt, müßte k unendlich groß sein, oder, was dasselbe ist, müßte es Sterne geben mit beliebig kleiner Parallaxe.

Man begreift nun, daß auf die letzte Frage keine Antwort gegeben werden kann, insofern als die astronomischen Beobachtungen immer begrenzt sind. Jedenfalls müssen wir, da die enorme Größe von k gegen die direkt meßbaren Größen feststeht, mit Lobatschefskij im Felde der Erfahrung die Gültigkeit der euklidischen Hypothese annehmen.

Zum selben Schluß könnten wir gelangen, wenn wir die Sache von der Winkelsumme im Dreieck her betrachten. Die astronomischen Beobachtungen zeigen, daß der Defekt eines Dreiecks, dessen Seiten nahezu dem Abstand der Erde von der Sonne gleich sind, nicht über 0″,0003 hinausgehen kann. Betrachteten wir

jetzt an Stelle eines astronomischen Dreiecks ein irdisches, mit Winkeln, die der Messung direkt zugänglich sind, so würde, kraft des Grundsatzes von der Proportionalität zwischen Flächeninhalt und Defekt, der mögliche Defekt des genannten Dreiecks notwendig in die Grenzen der Beobachtungsfehler fallen, so daß man für die Beobachtung festhalten kann, daß der fragliche Defekt Null ist und folglich im Felde der Erfahrung das euklidische Postulat gilt.[1])

Johann Bolyai [1802—1860].

§ 46. Mit Lobatschefskij teilt den Ruhm der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie der Ungar J. Bolyai, der Sohn von Wolfgang Bolyai [vgl. S. 63] und Offizier in der österreichischen Armee. Von sehr früher Jugend zeigte er eine wunderbare Anlage für Mathematik, in der ihn sein Vater selbst unterwies. Die Stunden bei Wolfgang lenkten bald die Aufmerksamkeit Johanns auf das XI. Axiom, zu dessen Beweis er sich dann anschickte, den Rat des Vaters verachtend, der darauf zielte, ihn von diesem Unternehmen abzulenken. Die Parallelentheorie bildete so die Lieblingsbeschäftigung des jungen Mathematikers während seines Aufenthalts [1817—22] an der kaiserlichen Ingenieur-Akademie in Wien.

Damals stand Johann in freundschaftlicher Beziehung zu Karl Szász [1798—1853] und in den Gesprächen der beiden tüchtigen Studenten keimten einige

---

1) Zum Inhalt dieses Paragraphen vgl. Lobatschefskij: „Über die Anfangsgründe der Geometrie", s. S. 22—24 des auf S. 87 genannten Werkes von Engel. Man sehe auch die Bemerkungen von Engel auf S. 248—52 desselben Werkes.

der Gedanken, die Bolyai dazu führten, die „absolute Raumwissenschaft" zu schaffen.

Es scheint, als ob man Szász den bestimmten Gedanken verdankt, die zu AM durch B gelegte Parallele als Grenzlage einer Sekante BC zu betrachten, die in bestimmtem Sinn sich um B dreht, d. h. BC als Parallele zu AM zu betrachten, wenn BC nach einem Ausdruck von Szász von AM abspringt. Bolyai benannte diese Parallele mit dem Namen asymptotische Parallele oder Asymptote [vgl. Saccheri]. In den Gesprächen der beiden Freunde trat auch der Begriff der von einer Geraden äquidistanten Linie auf; ferner der hochwichtige des Parazykl's [Orizykl bei Lobatschefskij] und man erkannte, daß der Beweis des XI. Axioms erhalten würde, wenn man beweisen könnte, daß der Parazykl eine Gerade ist.

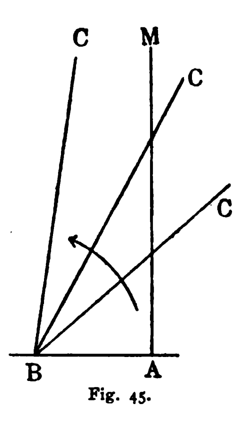


Fig. 45.

Nachdem Szász Anfang 1821 Wien verlassen hatte, um die Lehrkanzel für Recht am Kollegium zu Nagy-Enyed [Ungarn] zu übernehmen, blieb Johann allein bei der weiteren Fortführung seiner Betrachtungen. Bis 1820 war er von dem Gedanken beherrscht, einen Beweis von Axiom XI zu finden, indem er einen ähnlichen Weg wie Saccheri und Lambert befolgte. Er glaubte sogar sein Ziel erreicht zu haben, wie aus dem Briefwechsel mit seinem Vater hervorgeht.

Die Erkenntnis der begangenen Irrtümer war für Johann der entscheidende Schritt zu den zukünftigen Entdeckungen, weil er zugab, „daß man der Natur keinen Zwang antun soll, die Natur nach keinen blind gebildeten Hirngespinsten modeln, sondern vernünftiger und natür-



licher Weise eben die Wahrheit oder Natur selbst sehen wollen muß, und daß man zufrieden sein müsse mit der bestmöglichen Darstellung".

Damals nahm sich Johann Bolyai vor, eine absolute Theorie des Raumes zu konstruieren, wobei er die klassische Methode der Griechen befolgte, nämlich die deduktive Methode anwendete, ohne aber von vornherein über Gültigkeit oder Ungültigkeit des V. Postulats zu entscheiden.

§ 47. Erst 1823 drang Bolyai in das wahre Wesen seiner Aufgabe ein: in der Folge fügt er nur stoffliche und formale Ergänzungen dazu. In jener Zeit hatte er die Formel entdeckt

$$e^{-\frac{a}{k}} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Pi(a),$$

welche den Parallelwinkel $\Pi(a)$ mit der zugehörigen Strecke verknüpft [vgl. Lobatschefskij, S. 92), eine Beziehung, die der Schlüssel der ganzen nichteuklidischen Trigonometrie ist. Um die Entdeckungen von Johann in jener Zeit zu beleuchten, geben wir eine Stelle des Briefs wieder, den er aus Temesvar am 3. November 1823 an seinen Vater schrieb: „Mein Entschluß steht fest, ein Werk über die Parallelen herauszugeben, sobald ich den Stoff geordnet habe und es die Umstände erlauben; gegenwärtig habe ich es noch nicht, aber der Weg, den ich verfolgt habe, hat beinahe sicher das Erreichen des Zieles versprochen; ich habe das Ziel noch nicht, aber ich habe so großartige Sachen hervorgebracht, daß ich selbst verblüfft war, und daß es ewig schade wäre, wenn sie verloren gingen. Wenn Sie es sehen werden, werden Sie es auch erkennen; jetzt kann ich nur so viel sagen: daß ich aus Nichts eine neue Welt geschaffen habe. Alles was ich früher geschickt habe, ist ein

Kartenhaus im Vergleich zu dem Turme. Ich bin überzeugt, daß es mir nicht minder zur Ehre gereichen wird, als ob ich es schon entdeckt hätte."

Wolfgang äußerte den Wunsch, die Theorie seines Sohnes in das Tentamen aufzunehmen, weil „wenn es wirklich gelungen ist, mit der öffentlichen Bekanntmachung sich aus einem zwiefachen Grunde zu beeilen sei, erstens weil die Ideen leicht in einen anderen übergehen, der es sodann eher herausgibt, zweitens liegt auch darin einige Wahrheit, daß manche Dinge gleichsam eine Epoche haben, wo sie dann an mehreren Orten aufgefunden werden; gleichwie im Frühjahr die Veilchen mehrwärts ans Licht hervorkommen und, da alles wissenschaftliche Streben nur ein großer Krieg ist, worauf ich nicht weiß, wann der Friede folgen wird, so muß man, wenn man es vermag, siegen; indem hier dem ersten der Vorrang zukommt."

Wolfgang Bolyai vermutete nicht entfernt, daß seine Ahnung einer wirklichen Tatsache entsprach, d. h. der gleichzeitigen Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch die Arbeit von Gauß, Taurinus und Lobatschefskij.

1826 teilte Johann seine Arbeit seinem ehemaligen Lehrer an der Kriegsakademie J. Walter von Eckwehr [1789—1857] mit, der 1829 das Manuskript dem Vater zurücksandte. Wolfgang war nicht sehr zufriedengestellt, besonders weil er nicht einsehen konnte, wie überhaupt in den Formeln Johanns eine unbestimmte Konstante auftreten könnte. Nichtsdestoweniger verständigten sich Vater und Sohn, im Anhang zum ersten Bande des „Tentamen" die neue Raumtheorie zu veröffentlichen.

Der Titel des Werks von Johann Bolyai lautet: *„Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam*



decidenda, independentem: adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica."[1])

Der Anhang wurde ein erstes Mal [Juni 1831] an Gauß geschickt ohne seine Adresse zu erreichen, und ein zweites Mal im Januar 1832. Sieben Wochen daauf [am 6. März 1832] antwortete Gauß so an Wolfgang:

„Wenn ich damit anfange, daß ich solche [die Arbeit Johanns] nicht loben darf: so wirst Du gewiß einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hieße mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Teile schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der Tat bin ich dadurch auf das Äußerste überrascht.

Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht ist, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mitteilte, mit besonderem Interesse aufnahmen. Um das zu können, muß man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar. Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, daß es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge.

Sehr bin ich also überrascht, daß diese Bemühung

1) Wieder gedruckt in der Luxusausgabe im Auftrag der ungarischen Akademie der Wissenschaften, bei Gelegenheit der ersten Jahrhundertfeier des Verfassers [Budapest, 1902]. — Siehe die italienische Übersetzung von G. Battaglini in Bd. VI des Giornale di Matematica, S. 97—115 [1868].

mir nun erspart werden kann, und höchsterfreulich ist es mir, daß gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvor gekommen ist."

Wolfgang teilte diesen Brief seinem Sohne mit und fügte hinzu: „Gaußens Antwort hinsichtlich Deines Werkes ist sehr schön und gereicht unserem Vaterlande und unserer Nation zur Ehre."

Eine ganz andere Wirkung hatte der Brief von Gauß auf Johann. Er wollte und konnte sich nicht überzeugen, daß andere, vor und unabhängig von ihm, zu der nichteuklidischen Geometrie gelangt seien. Er hat sogar den Verdacht, daß sein Vater Gauß seine Entdeckungen mitgeteilt hat, bevor er ihm den „Appendix" schickte, und daß Gauß sich die Priorität der Entdeckung anmaßen wollte. Und obwohl er in der Folge sich überzeugen mußte, daß dieser Verdacht unbegründet war, so bewahrte Johann gegen den „summus geometra" eine ungerechtfertigte Abneigung.[1])

§ 48. Wir geben hier ein Verzeichnis der wichtigsten Resultate, die in dem Werk von Johann Bolyai enthalten sind:

a) Definition der Parallelen und ihre Eigenschaften unabhängig vom Euklidischen Postulat.

b) Kreis und Kugel von unendlich großem Radius. Die Geometrie auf der Kugel von unendlich großem Radius ist identisch mit der gewöhnlichen ebenen Geometrie.

---

1) Für den Inhalt des vorhergehenden Paragraphen vgl. Stäckel: „Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai", Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn, t. XVII [1901]; Stäckel und Engel: „Gauß, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie", Math. Ann. 40, S. 149—167 [1897]; Bull. Sc. Math. (2), t. XXI, S. 206—228 [1897].

c) Die sphärische Trigonometrie ist unabhängig vom Postulat des Euklid.

d) Ebene Trigonometrie im nichteuklidischen Fall. Anwendung auf die Berechnung von Flächen- und Rauminhalt.

e) Elementar lösbare Probleme. Konstruktion eines Quadrats von gleichem Flächeninhalt wie der Kreis bei der Hypothese der Ungültigkeit des V. Postulats.

Während Lobatschefskij der imaginären Geometrie, besonders ihrem analytischen Inhalt größere Entwicklungen gewidmet hat, hat Bolyai die Frage der Abhängigkeit oder Nichtabhängigkeit der geometrischen Sätze vom euklidischen Postulat gründlicher behandelt. Während Lobatschefskij hauptsächlich darauf zielt, ein geometrisches System auf der Ablehnung des fraglichen Postulats aufzubauen, läßt Johann Bolyai die Sätze und Konstruktionen ins Licht treten, die in der gewöhnlichen Geometrie nicht von diesem Postulat abhängen.

Solche Sätze, die er absolut wahr nennt, gehören der absoluten Wissenschaft vom Raum an. Man könnte die Sätze dieser Wissenschaft auffinden, indem man die Geometrie von Euklid und die von Lobatschefskij gegenüberstellt. Alles was die beiden Geometrien gemein haben, z. B. die Formeln der sphärischen Trigonometrie, gehört der absoluten Geometrie an. Johann Bolyai folgt übrigens nicht diesem Weg, er beweist direkt, d. h. unabhängig vom euklidischen Postulat seine absolut wahren Sätze.

§ 49. Ein absoluter Satz von Bolyai, der von wunderbarer Einfachheit und Eleganz ist, ist der folgende: In einem geradlinigen Dreieck verhalten sich die Kreise, deren Radien den Seiten gleich sind, zueinander wie die Sinus der den Seiten gegen-

überliegenden Winkel. Sei (Fig. 46) ABC ein bei C rechtwinkliges Dreieck und BB' das Lot in B auf der Ebene des Dreiecks. Durch die Ecken A, C ziehen wir die Geraden AA' und CC', die in bestimmtem Sinn parallel zu BB' sind, sodann denke man sich durch A die Grenzkugel [eventuell die Ebene] beschrieben, die die

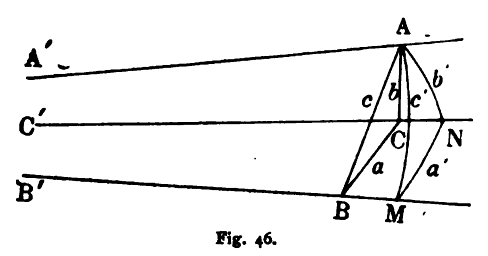


Fig. 46.

Geraden AA', BB', CC' bzw. in den Punkten A, M und N schneidet. Bezeichnen wir mit a', b', c' die Seiten des rechtwinkligen Grenzkugeldreiecks AMN, so ist kraft des oben Gesagten [z. B. § 48, b)]:

$$\sin \sphericalangle AMN = b' : c'.$$

Aber auf der Grenzkugel verhalten sich zwei Grenzkreisbogen wie die Kreise, die zu [grenzkreisförmigen] Radien diese Bogen haben, so daß, wenn man mit Kreis x' den Umfang des Kreises vom Radius x' auf der Grenzfläche bezeichnet, man schreiben kann:

$$\sin \sphericalangle AMN = \text{Kreis } b' : \text{Kreis } c'.$$

Andrerseits kann ein auf der Grenzkugel gelegener Kreis vom Grenzbogenradius x' als gewöhnlicher Kreis betrachtet werden, dessen geradliniger Radius x die Hälfte der Sehne des Grenzbogens $2x'$ ist. Bezeichnet man also mit $\bigcirc x$ den Umfang des Kreises vom geradlinigen Radius x und beachtet man, daß die beiden

Winkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle AMN$ gleich sind, so nimmt die vorhergehende Beziehung die Form an:

$$\sin \sphericalangle ABC = \bigcirc b : \bigcirc c.$$

Aus der in dieser Gleichung ausgesprochenen Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks ABC kann man den ausgesprochenen Lehrsatz von Bolyai ableiten, in genau derselben Weise, wie aus der euklidischen Beziehung:

$$\sin \sphericalangle ABC = b : c$$

die Proportionalität zwischen den Seiten eines Dreiecks und den Sinus der gegenüberliegenden Winkel [Appendix § 25].

Der Lehrsatz von Bolyai drückt sich kurz so aus:

(1) $$\bigcirc a : \bigcirc b : \bigcirc c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Wollen wir das geometrische System spezialisieren, so hätten wir

1. im Falle der euklidischen Hypothese

$$\bigcirc x = 2 \pi x$$

und in (1) einsetzend

(1′) $$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

2. im Falle der nichteuklidischen Hypothese [vgl. § 54]

$$\bigcirc x = \pi k \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}} \right) = 2 \pi k Sh \frac{x}{k}$$

und wie oben verfahrend

(1″) $$Sh \frac{a}{k} : Sh \frac{b}{k} : Sh \frac{c}{k} = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Diese letzte Beziehung kann als der Sinussatz der Lobatschefskij-Bolyaischen Geometrie bezeichnet werden.

Aus den Formeln (1) leitet Bolyai durch ähnliches Verfahren, wie das gewöhnliche auf (1') beruhende, die Proportionalität zwischen den Sinus der Winkel und den Sinus der Seiten eines sphärischen Dreiecks ab. Hieraus ergibt sich die Unabhängigkeit der sphärischen Trigonometrie vom euklidischen Postulat [Appendix § 26]. Diese Tatsache macht die Wichtigkeit des Bolyaischen Lehrsatzes noch deutlicher.

§ 50. Nur der absoluten Geometrie gehört folgende Konstruktion der Parallelen durch den Punkt D zur Geraden AN an [Appendix, § 34];

Nachdem (Fig. 47) die Geraden DB und AE senkrecht zu AN gezogen sind, fälle man von D das Lot DE auf die Gerade AE. Der Winkel $\sphericalangle EDB$ des dreirechtwinkligen Vierecks $ABDE$ ist ein rechter oder spitzer, je nachdem ED gleich oder größer als AB ist. Um den Mittelpunkt A beschreibe man einen Kreis vom

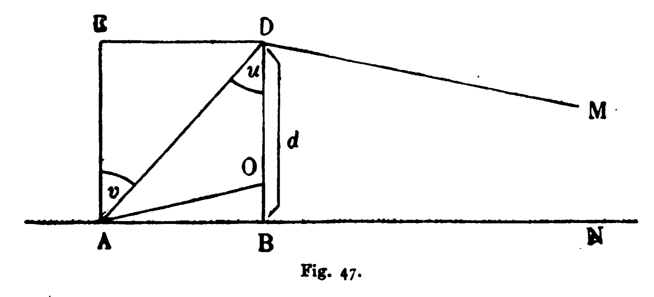


Fig. 47.

Radius ED: er wird die Strecke BD in einem Punkt O schneiden, der mit B zusammenfällt oder zwischen B und D liegt. Die Gerade AO bildet mit DB einen Winkel $\sphericalangle AOB$, der gleich dem zur Strecke BD gehörigen Parallelwinkel ist[1]) [Appendix, § 27].

1) Bolyai beweist diesen Satz kurz gesagt so. Die Kreise $\odot AB$, $\odot ED$, die aus den Punkten B und D bei der Rotation

Man wird also durch D eine Parallele zu AN konstruieren, indem man die Gerade DM so zieht, daß der Winkel $\sphericalangle BDM$ gleich dem Winkel $\sphericalangle AOB$ wird.[1])

§ 51. Unter den nichteuklidischen Konstruktionen, die Bolyai gegeben hat, ist die Quadratur des Kreises sehr interessant. Ohne uns ganz eng an die Methode von Bolyai zu halten, suchen wir die Konstruktionen in ihren Hauptlinien zu entwickeln.

Wir schicken die zur Konstruktion des § 50 entgegengesetzte Konstruktion voraus, die für unsern Zweck nötig ist:

„Im Fall der nichteuklidischen Hypothese

---

um die Achse AE entstehen, sind anzusehen der erste als angehörig der in A zur Achse AE senkrechten Ebene, der zweite als einer zu dieser Ebene äquidistanten Fläche angehörig. Der unveränderliche Abstand zwischen Fläche und Ebene ist gegeben durch die Strecke $d = BD$. Die Beziehung zwischen den beiden genannten Kreisen ergibt sich also als Funktion von d allein. Diese Beziehung kann auch ausgedrückt werden, wenn man sich an einen Lehrsatz von Bolyai erinnert [§ 49], sie führt, auf die rechtwinkligen Dreiecke ADE, ADB angewendet, auf die Beziehung:

$$\bigcirc AB : \bigcirc ED = \sin u : \sin v.$$

Hieraus sieht man, daß das Verhältnis $\sin u : \sin v$ sich nicht ändert, wenn bei festbleibendem d die Gerade AE verschoben wird und dabei beständig senkrecht zu AB bleibt. Wenn im besondern der Fußpunkt von AE auf AN ins Unendliche fortwandert, so wächst u zu $\Pi(d)$ an und v zum rechten Winkel. Folglich

$$\bigcirc AB : \bigcirc ED = \sin \Pi(d) : 1.$$

Andererseits gilt im rechtwinkligen Dreieck AOB die Beziehung

$$\bigcirc AB : \bigcirc AO = \sin \sphericalangle AOB ; 1,$$

die zusammen mit der vorhergehenden zur Feststellung der Gleichheit der beiden Winkel $\Pi(d)$ und $\sphericalangle AOB$ führt, w. z. b. w.

1) Vgl. hierzu Anhang III.

die einem gegebenen [spitzen] Parallelwinkel entsprechende Strecke zu konstruieren."

Unter der Annahme, daß der Lehrsatz, daß die drei Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden, auch im gegebenen Fall noch in der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie gilt, nehmen wir auf dem Schenkel AB des spitzen Winkels $\sphericalangle BAA'$ [Fig. 48] einen Punkt B so an, daß die Parallele BB' zur Geraden AA' den spitzen Winkel $\sphericalangle B'BA$ bildet. Die beiden Halbgeraden $AA' \ldots$, $BB' \ldots$ und die Strecke AB können als Seiten eines Dreiecks betrachtet werden, von dem der Punkt C_∞, der den beiden Parallelen AA' und BB' gemein ist, eine Ecke ist. Fällt man sodann von den Ecken A und B die Lote AH und BK auf die gegenüberliegenden Seiten, so treffen sich die Lote in einem Punkt O im Innern des Dreiecks,

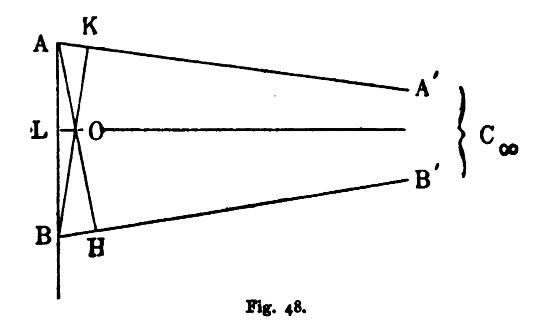


Fig. 48.

durch den auch das von C_∞ auf AB gefällte Lot geht. Fällt man also von O aus das Lot OL auf AB, so wird die Strecke AL bestimmt, die dem Parallelwinkel $\sphericalangle BAA'$ zugehört.

Im Spezialfall könnte der Winkel $\sphericalangle BAA'$ auch 45^0 betragen: dann wäre AL die Schweikartsche Konstante [vgl. S. 56].

Wir bemerken, daß das gelöste Problem auch so

ausgesprochen werden könnte: **Eine Gerade zu konstruieren, die dem einen Schenkel eines spitzen Winkels parallel ist und auf dem andern senkrecht steht.**[1])

§ 52. Wir zeigen jetzt, wie das vorhergehende Ergebnis benutzt wird, **um ein Quadrat von gleichem Flächeninhalt wie das Maximaldreieck zu konstruieren.**

Da der Flächeninhalt Δ eines Dreiecks den Wert hat:

$$k^2(\pi - \sphericalangle A - \sphericalangle B - \sphericalangle C),$$

so wird für das Maximaldreieck, d. h. das Dreieck, dessen drei Ecken im Unendlichen liegen:

$$\Delta = k^2\pi.$$

Um den Winkel ω eines Quadrats von der Fläche $k^2\pi$ zu bestimmen, genügt es, daran zu erinnern [Lambert S. 48], daß auch der Flächeninhalt eines Polygons wie der eines Dreiecks proportional dem Defekt ist, weshalb die Beziehung bestehen muß:

$$k^2\pi = k^2(2\pi - 4\omega),$$

woraus

$$\omega = \tfrac{1}{4}\pi = 45^0.$$

Dies vorausgeschickt, betrachten wir das rechtwinklige Dreieck OAM, das der achte Teil des gesuchten Quadrates ist (Fig. 49). Setzt man $OM = a$ und wendet man die Formel (2) von S. 83 an, so erhält man

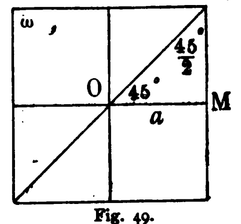


Fig. 49.

$$Ch\frac{a}{k} = \cos\tfrac{1}{2}45^0 : \sin 45^0$$

1) Die Lösung von Bolyai [Appendix, § 35] ist übrigens viel umständlicher.

oder auch

$$Ch\frac{a}{k} = \sin\tfrac{1}{2}(135^0) : \sin 45^0.$$

Konstruiert man jetzt nach § 51 die beiden Strecken b', c', die den Parallelwinkeln $\frac{1}{2}\,135^0$, 45^0 entsprechen, und erinnert man sich, daß nach S. 93, 6:

$$Ch\frac{x}{k} = \frac{1}{\sin\Pi(x)},$$

so wird zwischen den drei Strecken a, b', c' die Beziehung bestehen

$$Ch\frac{a}{k}\cdot Ch\frac{b'}{k} = Ch\frac{c'}{k}.$$

Nimmt man endlich b' als Kathete, c' als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist die andere Kathete dieses Dreiecks kraft Formel (1) S. 80 durch die Gleichung bestimmt:

$$Ch\frac{a'}{k}\cdot Ch\frac{b'}{k} = Ch\frac{c'}{k}.$$

Stellt man diese Gleichung neben die vorhergehende, so erhält man $a' = a$. Nachdem so a konstruiert ist, ist unmittelbar das Quadrat von gleichem Flächeninhalt wie das Maximaldreieck konstruierbar.

§ 53. Um jetzt einen Kreis von gleichem Flächeninhalt wie dieses Quadrat oder, was dasselbe ist, wie das Maximaldreieck zu konstruieren, muß man den Ausdruck:

$$\circledcirc\, r = 2\pi k^2\left(Ch\frac{r}{k} - 1\right),$$

der den Inhalt des Kreises vom Radius r angibt [vgl. S. 84], umformen durch Einführung des Parallelwinkels $\Pi\left(\frac{r}{2}\right)$,

der dem Halbradius entspricht. Wenn man dies tut, so erhält man[1]):

$$\odot r = \frac{4\pi k^2}{\operatorname{tg}^2 \Pi\left(\frac{r}{2}\right)}.$$

Wenn man andererseits (Fig. 50) von den Endpunkten der Strecke $AB = r$ die beiden Parallelen AA' und BB' zieht, so daß die Winkel, die sie mit AB bilden, gleich sind, so wird:

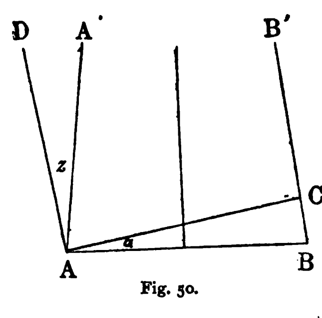


Fig. 50.

$$\sphericalangle A'AB = \sphericalangle B'BA = \Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

Nachdem noch das Lot AC auf BB' gefällt ist und das Lot AD auf AC errichtet, und die Bezeichnung eingeführt

$$\sphericalangle CAB = \alpha, \quad \sphericalangle DAA' = z,$$

so hat man:

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg}\left(\Pi\left(\frac{r}{2}\right) - \alpha\right) = \frac{\operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{r}{2}\right) \operatorname{ctg} \alpha + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{r}{2}\right)}.$$

Wendet man die trigonometrischen Formeln im Dreieck ABC an, so kann man leicht α aus dem letzten

---

1) In der Tat, wegen der Eigenschaft der hyperbolischen Funktionen hat man

$$Ch\frac{r}{k} - 1 = 2 Sh^2 \frac{r}{2k} = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{r}{2k}} - e^{-\frac{r}{2k}}\right)^2$$

und wegen der Eigenschaft des Parallelwinkels (vgl. S. 93)

$$e^{-\frac{r}{2k}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

Glied der vorhergehenden Beziehung eliminieren und so erhalten [1]):

$$\operatorname{tg} z = \frac{2}{\operatorname{tg} \Pi\left(\frac{r}{2}\right)},$$

woraus sich mittels des letzten Ausdrucks für $\oslash r$ ergibt

$$\oslash r = \pi k^2 \operatorname{tg}^2 z.$$

Diese Formel, die auf anderem Weg von Bolyai bewiesen ist [Appendix § 43], gestattet es, jedem Kreis einen bestimmten Winkel z zuzuordnen. Wäre $z = 45^0$, so hätte man

$$\oslash r = \pi k^2,$$

d. h.: Der Inhalt des Kreises, dessen Winkel z gleich 45^0 beträgt, ist gleich dem Inhalt des Maximaldreiecks und deshalb dem des Quadrats § 52.

Wenn $z = \sphericalangle A'AD$ [Fig. 50] gegeben ist, so konstruiert man dann r, indem man zieht

---

1) In der Tat hat man im rechtwinkligen Dreieck ABC:

$$\operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{r}{2}\right) \operatorname{ctg} \alpha = Ch\,\frac{r}{k}$$

und hieraus, weil:

$$Ch\,\frac{r}{k} = 2\,Sh^2\,\frac{r}{2k} + 1 = 2 \operatorname{ctg}^2 \Pi\left(\frac{r}{2}\right) + 1,$$

folgt weiter

$$\operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{r}{2}\right) \operatorname{ctg} \alpha = 2 \operatorname{ctg}^2 \Pi\left(\frac{r}{2}\right) + 1$$

und schließlich ist

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \Pi\left(\frac{r}{2}\right) = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \Pi\left(\frac{r}{2}\right)\right) \cdot \cot \Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

Diese beiden Beziehungen erlauben, den Ausdruck für $\operatorname{tg} z$ in der geforderten Form zu schreiben.

1. die Gerade AC senkrecht zu AD; 2. die Gerade BB' parallel zu AA' und senkrecht zu AC [§ 51]; 3. die Halbierungslinie des Streifens, der von AA' und BB' begrenzt ist [durch Anwendung des Lehrsatzes über den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden in einem Dreieck mit einem uneigentlichen Winkel]; 4. das Lot AB auf diese Halbierungslinie: die Strecke AB zwischen AA' und BB' ist dann der Strahl r.

§ 54. Die Aufgabe, ein Polygon zu konstruieren, das den gleichen Flächeninhalt $\pi k^2 \operatorname{tg}^2 z$ hat wie ein Kreis, ist, wie Bolyai bemerkt, eng verknüpft mit dem Zahlenwert von $\operatorname{tg}^2 z$. Sie ist für jeden ganzzahligen Wert von $\operatorname{tg}^2 z$ lösbar, und für jeden gebrochenen Wert, sobald nur der Nenner, nachdem der Bruch auf kleinste Benennung gebracht ist, unter die von Gauß für die Konstruktion regulärer Polygone vorgeschriebene Form gehört [Appendix § 43].

Die Möglichkeit, ein Quadrat von gleichem Flächeninhalt wie der Kreis zu konstruieren, führt Johann zu dem Schluß: „*habeturque aut Axioma XI Euclidis verum, aut quadratura circuli geometrica;* etsi hucusque indecisum manserit, quodnam ex his duobus revera locum habeat.“

Die so ausgesprochene Frage schien ihm zu dieser Zeit [1831] unlösbar, insofern, als er seine Schrift mit diesen Worten schließt: „Superesset denique (ut res omni numero alsolvatur), impossibilitatem (absque suppositione aliqua) decidenda, num Σ (das euklidische System) aut aliquod (et quodnam) S (nichteuklidisches System) sit, demonstrare: quod tamen occasioni magis idoneae reservatur.“

Johann veröffentlichte aber nie einen derartigen Beweis.

§ 55. Nach 1831 beschäftigte sich Johann noch mit seiner Geometrie und im besondern mit den folgenden Aufgaben:

1. Verbindung zwischen der sphärischen und der nichteuklidischen Trigonometrie.

2. Kann man streng beweisen, daß das euklidische Axiom keine Folge der andern ist?

3. Rauminhalt des Tetraeders in der nichteuklidischen Geometrie.

Was die erste dieser drei Fragen betrifft, so erkannte Bolyai, außer dem, daß er sich Rechenschaft gab über die analytische Beziehung, welche die beiden Trigonometrien verbindet [vgl. Lobatschefskij S. 94], noch, daß es bei der nichteuklidischen Hypothese drei Typen von gleichförmigen[1]) Oberflächen gibt, auf denen entsprechend die nichteuklidische, die gewöhnliche und die sphärische Trigonometrie gilt. Zum ersten Typus gehören die Ebenen und die Hypersphären [Flächen gleichen Abstands von einer Ebene], zum zweiten Typus die Parasphären [Grenzkugeln von Lobatschefskij], zum dritten die Kugeln. Von den Hypersphären gelangt man zu den Kugeln durch den Grenzfall der Parasphären hindurch. Dieser Übergang verwirklicht sich analytisch, indem man einen Parameter, der in den Formeln auftritt [vgl. Taurinus p. 80], nach der Stetigkeit vom reellen Gebiet ins rein imaginäre durchs Unendliche hindurch übergehen läßt.

Was das zweite Problem, die Unbeweisbarkeit des XI. Axioms, angeht, so gelang Bolyai die Lösung nicht, auch bildete er sich keine feste Meinung darüber. Eine bestimmte Zeit lang glaubte er, man könnte in keiner

---

1) Mit diesem Namen scheint Bolyai die Oberflächen anzudeuten, die sich, was die Beweglichkeit in sich betrifft, wie die Ebene verhalten.

Weise entscheiden, welcher Fall, der euklidische oder der nichteuklidische, der wahre sei, und stützte sich, wie schon Lobatschefskij, auf die analytische Gültigkeit der neuen Trigonometrie. Dann trat bei Johann eine Rückkehr zu den alten Vorstellungen ein, begleitet von einem neuen Beweisversuch des XI. Axioms. Bei diesem Versuch wendet er die nichteuklidischen Formeln auf ein System von fünf vollkommen unabhängigen Punkten an. Zwischen den Abständen dieser Punkte besteht notwendig eine Beziehung. Johann fand aber durch einen Rechenfehler diese Beziehung nicht und glaubte so eine Zeitlang die Falschheit der nichteuklidischen Hypothese und die absolute Wahrheit von Axiom XI bewiesen zu haben.[1])

In der Folge aber bemerkte er den Irrtum, ging aber in dieser Richtung zu keinen weiteren Untersuchungen über, weil ihn die Methode, auf ein System von sechs oder mehr Punkten angewendet, auf zu lange Rechnungen geführt hätte.

Das dritte oben angegebene Problem über das Tetraeder ist von rein geometrischer Natur. Die Lösungen von Bolyai wurden neuerdings von Stäckel aufgefunden und ans Licht gebracht [vgl. die Anmerkung auf dieser Seite]. Mit demselben Problem hatte sich Loba-

---

1) Der Titel der Schrift von Johann, wo er diesen Beweis auseinandersetzen wollte, lautet: „Beweis des bis nun auf der Erde immer noch zweifelhaft gewesenen, weltberühmten und, als der gesammten Raum- und Bewegungslehre zu Grunde dienend, auch in der That allerhöchst wichtigsten 11. Euklid'schen Axioms. Von J. Bolyai von Bolya, k. k. Genie-Stabshauptmann in Pension.“ Vgl. darüber die Schrift von P. Stäckel: „Untersuchungen aus der absoluten Geometrie aus Johann Bolyais Nachlaß“. Math. u. naturw. Berichte aus Ungarn XVIII, S. 280—307 [1902]. Auf diese Schrift verweisen wir für den ganzen Inhalt des § 55.

tschefskij eingehend seit 1829 beschäftigt[1]), und Gauß schlug es Johann vor in dem auf S. 104 zum Teil wieder gegebenen Brief.

Wir fügen schließlich noch hinzu, daß, als Johann Bolyai [1848] zur Kenntnis der „Geometrischen Untersuchungen“ von Lobatschefskij gelangte, er sich mit ihnen in kritischer Absicht beschäftigte[2]) und ferner, um den russischen Geometer zu übertrumpfen, sich anschickte, ein großes Werk zu verfassen über die Reform der Prinzipien der Mathematik, wozu er den Plan schon zur Zeit der Veröffentlichung des „Appendix“ gefaßt hatte, dessen Abschluß ihm aber nicht gelang.[3])

Die absolute Trigonometrie.

§ 56. Obwohl die Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie als Grenzfall die gewöhnlichen Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks enthalten [vgl. S 82], so gehören sie doch nicht zu dem, was Bolyai absolute Geometrie nannte. In der Tat können die genannten Formeln nicht ohne weiteres auf die beiden Typen der Geometrie angewandt werden, und sie wurden abgeleitet unter Annahme der Gültigkeit der Hyp. d. spitz. W. Wir begegneten in § 49 Formeln, die ohne weiteres auf den euklidischen und den nichteuklidischen Fall anwendbar waren und den Lehrsatz von Bolyai bilden. Es sind drei, von denen nur zwei

---

1) Siehe S. 53 u. ff. des auf S. 87 genannten Werkes; ferner das in Anm. 2 S. 88 genannte Buch.

2) Vgl. P. Stäckel und J. Kürschák: Johann Bolyais Bemerkungen über N. Lobatschefskijs Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn XVIII, S. 250—279 [1902].

3) Vgl. P. Stäckel: „Johann Bolyais Raumlehre“. Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn XIX [1903].

unabhängig sind, und sie liefern uns so eine erste Gruppe von Formeln der **absoluten Trigonometrie**.

Andere Formeln der absoluten Trigonometrie wurden 1870 gegeben von dem belgischen Geometer M. De Tilly in seinen „*Études de Mécanique abstraite*".[1])

Die Formeln von De Tilly beziehen sich auf die rechtwinkligen Dreiecke und wurden mittels kinematischer Betrachtungen abgeleitet, die nur solche Eigenschaften eines begrenzten Gebiets der Ebene benützen, die unabhängig von dem Wert der Winkelsumme im Dreieck sind.

Außer der Funktion $\bigcirc x$, die uns schon in den Formeln von Bolyai begegnet, erscheint in denen von De Tilly noch eine Funktion Ex, die in folgender Weise definiert ist. r sei eine Gerade, l die **Linie gleichen Abstandes** zu r und zwar im Abstand x. Da die Bogen von l den entsprechenden Projektionen auf r proportional sind, so ist klar, daß das Verhältnis zwischen einem (rektifizierten) Bogen von l und seiner Projektion nicht von der Länge des Bogens abhängen wird, sondern nur vom Abstand x. Die Funktion, die dieses Verhältnis ausdrückt, ist die von De Tilly eingeführte Funktion Ex.

Dies festgesetzt, lauten die Formeln der absoluten Trigonometrie, die sich auf das Dreieck ABC beziehen, so:

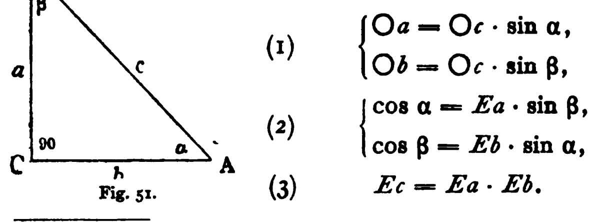


Fig. 51.

$$(1)\quad \begin{cases} \bigcirc a = \bigcirc c \cdot \sin\alpha, \\ \bigcirc b = \bigcirc c \cdot \sin\beta, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\alpha = Ea \cdot \sin\beta, \\ \cos\beta = Eb \cdot \sin\alpha, \end{cases}$$

$$(3)\quad Ec = Ea \cdot Eb.$$

---

1) Mémoires couronnés et autres Mémoires von der kgl. Akademie in Belgien, Bd. XXI [1870]. Man sehe auch von demselben Verfasser: „*Essai sur les principes fondamenteaux de la*

Die Gruppe (1) ist der Satz von Bolyai im rechtwinkligen Dreieck. Alle Formeln der absoluten Trigonometrie können durch geeignete Zusammensetzung dieser drei Gruppen abgeleitet werden. Im besonderen erhält man im rechtwinkligen Dreieck:

$$\bigcirc^2 a(Ea + Eb \cdot Ec) + \bigcirc^2 b \cdot (Eb + Ec \cdot Ea)$$
$$= \bigcirc^2 c(Ec + Ea \cdot Eb).$$

Diese Formel kann als der Ausdruck für den Lehrsatz des Pythagoras in der absoluten Geometrie betrachtet werden.[1])

§ 57. Sehen wir jetzt zu, wie aus den Beziehungen des vorhergehenden Paragraphen die Formeln der euklidischen und der nichteuklidischen Geometrie abgeleitet werden können.

Euklidischer Fall. — Die Abstandslinie l ist eine Gerade [daher $Ex = 1$], die Kreisumfänge sind den Radien proportional. Dann werden die Gleichungen (1):

$$(1') \qquad \begin{cases} a = c \sin \alpha, \\ b = c \sin \beta; \end{cases}$$

und die Gleichungen (2) geben:

$$\cos \alpha = \sin \beta, \quad \cos \beta = \sin \alpha,$$

also:

$$(2') \qquad \alpha + \beta = 90^0;$$

(3) endlich reduziert sich auf eine Identität.

Die Formeln (1'), (2') enthalten die ganze gewöhnliche Trigonometrie.

Géométrie et de la Mécanique". Mém. de la Société des Sciences de Bordeaux, t. III, 1er cahier [1878].

1) Vgl. R. Bonola: „*La trigonometria assoluta secondo Giovanni Bolyai*". Rend. Istituto Lombardo (2) t. XXXVIII [1905].

Nichteuklidischer Fall. — Kombiniert man (1) und (2) miteinander, so erhält man

$$(5)\qquad \frac{\bigcirc^2 a}{E^2 a - 1} = \frac{\bigcirc^2 b}{E^2 b - 1}.$$

Wenden wir dann die erste der Formeln (2) auf ein Dreieck mit der sich ins Unendliche entfernenden Ecke A und also nach Null abnehmendem α an, so erhalten wir:

$$\lim \cos \alpha = \lim (Ea \cdot \sin \beta).$$

Aber Ea ist unabhängig von α und der Winkel β wird in der Grenze der Parallelwinkel, der a entspricht, d. h. $\Pi(a)$. Wir haben also

$$Ea = \frac{1}{\sin \Pi(a)}.$$

Dasselbe gilt für Eb. Setzen wir dies in (5) ein, so erhalten wir:

$$\frac{\bigcirc^2 a}{\operatorname{ctg}^2 \Pi(a)} = \frac{\bigcirc^2 b}{\operatorname{ctg}^2 \Pi(b)},$$

hieraus:

$$\frac{\bigcirc a}{\operatorname{ctg} \Pi(a)} = \frac{\bigcirc b}{\operatorname{ctg} \Pi(b)}.$$

Diese Beziehung erlaubt uns zusammen mit dem Ausdruck für Ex ohne weiteres aus (1), (2), (3) die Formeln der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie zu erhalten:

$$(1'')\qquad \begin{cases} \operatorname{ctg} \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(c) \cdot \sin \alpha \\ \operatorname{ctg} \Pi(b) = \operatorname{ctg} \Pi(c) \sin \beta, \end{cases}$$

$$(2'')\qquad \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \sin \Pi(b) \\ \sin \beta = \cos \alpha \sin \Pi(a), \end{cases}$$

$$(3'')\qquad \sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b).$$

Diese Beziehungen, denen die Stücke jedes rechtwinkligen Dreiecks genügen, sind in dieser Form von Loba-

tschefskij[1]) gegeben. Wollten wir an Stelle der Parallelwinkel $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$ direkte Funktionen der Seiten einführen, so genügt es sich zu erinnern [S. 93], daß

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}},$$

und die Kreisfunktionen von $\Pi(x)$ als hyperbolische Funktionen von x auszudrücken. Man würde dann die vorhergehenden Beziehungen in neuer Gestalt erhalten:

$$(1''') \qquad \begin{cases} Sh\frac{a}{k} = Sh\frac{c}{k} \cdot \sin\alpha, \\ Sh\frac{b}{k} = Sh\frac{c}{k} \sin\beta, \end{cases}$$

$$(2''') \qquad \begin{cases} \cos\alpha = \sin\beta \cdot Ch\frac{a}{k}, \\ \cos\beta = \sin\alpha \cdot Ch\frac{b}{k}, \end{cases}$$

$$(3''') \qquad \left\{ Ch\frac{c}{k} = Ch\frac{a}{k} \cdot Ch\frac{b}{k}. \right.$$

§ 58. Sehr wichtig ist die folgende Bemerkung über die absolute Trigonometrie. Deutet man die Elemente ihrer Formeln als Elemente eines sphärischen Dreiecks, so ergibt sich ein System von Beziehungen, die auch für die sphärischen Dreiecke gelten.

Der Grund dieser Eigenschaft der absoluten Trigonometrie ruht in der bereits S. 120 bemerkten Tatsache, daß sie nur mit Anwendung von solchen Beziehungen abgeleitet ist, die auf endliche Gebiete der Ebene sich beziehen, die ferner unabhängig von den Annahmen über die Winkelsumme im Dreieck sind und die deshalb auch auf der Kugel gelten.

---

1) Vgl. z. B. die „Geometrischen Untersuchungen" von Lobatschefskij, die auf S. 89 angeführt sind.

Wer das Ergebnis direkt ableiten will, könnte bemerken:

1. Daß in der sphärischen Geometrie die Kreisumfänge den Sinus der (sphärischen) Radien proportional sind, weshalb die erste Formel der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke

$$\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha$$

sich unmittelbar in die erste Formel (1) verwandelt.

2. Daß ein Kreis vom sphärischen Radius $\frac{1}{2}\pi - b$ als eine Linie gleichen Abstandes vom konzentrischen Maximalkreis betrachtet werden kann, und daß das Verhältnis Eb zwischen den beiden Kreisen gegeben ist durch

$$\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi - b)}{\sin \frac{1}{2}\pi} = \cos b,$$

weswegen die Formeln der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke

$$\cos \alpha = \sin \beta \cdot \cos a,$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b$$

unmittelbar in (2) und (3) übergehen.

Also: die Formeln der absoluten Trigonometrie gelten auch auf der Kugel.

Hypothesen, die mit dem euklidischen Postulat gleichberechtigt sind.

§ 59. Bevor wir das elementare Gebiet verlassen, scheint es uns angebracht, die Aufmerksamkeit des Lesers darauf zu lenken, welchen Wert im Organismus der Geometrie die Sätze haben, die in einem bestimmten Sinne als dem V. Postulat äquivalente Hypothesen gelten können.

Um uns deutlich verständlich zu machen, beginnen wir mit der Erklärung der Bedeutung dieser Äquivalenz.



Zwei Hypothesen sind absolut gleichberechtigt, wenn jede von ihnen aus der anderen folgt ohne Hilfe einer neuen Hypothese. In diesem Sinne sind absolut äquivalent die beiden folgenden Hypothesen:

a) Zwei zu einer dritten parallele Gerade sind untereinander parallel.

b) Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden geht eine und nur eine Parallele zu dieser Geraden.

Diese Art von Äquivalenz hat nicht viel Interesse, weil die beiden Hypothesen einfach zwei verschiedene Formen eines und desselben Satzes sind. Wir wollen vielmehr zusehen, wie der Begriff der Äquivalenz verallgemeinert werden kann.

Nehmen wir an, es sei eine deduktive Theorie auf ein bestimmtes System von Hypothesen begründet, das wir mit $\{A, B, C \ldots H\}$ bezeichnen wollen. Seien dann M und N zwei neue Hypothesen, derart, daß aus dem System $\{A, B, C \ldots H, M\}$ das N abgeleitet werden kann und aus dem System $\{A, B, C \ldots H, N\}$ das M. Wir deuten das an, indem wir schreiben:

$$\{A, B, C \ldots H, M\} \cdot\supset\cdot N,$$
$$\{A, B, C \ldots H, N\} \cdot\supset\cdot M.$$

Verallgemeinern wir jetzt den Begriff der Äquivalenz, so können wir sagen, daß die beiden Hypothesen M, N äquivalent sind in bezug auf das Fundamentalsystem $\{A, B, C \ldots H\}$.

Wir betonen die Wichtigkeit, welche in dieser Definition das Fundamentalsystem $\{A, B, C \ldots H\}$ hat. In der Tat kann es eintreten, daß, wenn man das Fundamentalsystem einschränkt, indem man z. B. die Hypothese A ausläßt, die beiden Schlüsse

$$\{B, C \ldots H, M\} \cdot \supset \cdot N$$

$$\{B, C \ldots H, N\} \cdot \supset \cdot M$$

nicht gleichzeitig möglich sind.

Dann sind die Hypothesen M, N hinsichtlich des neuen Fundamentalsystems $\{B, C \ldots H\}$ nicht äquivalent.

Nach diesen Erklärungen logischer Natur wollen wir sehen, was aus den vorgehenden Entwicklungen für die Äquivalenz solcher Hypothesen und der euklidischen Hypothese folgt.

Nehmen wir an erster Stelle als Fundamentalsystem das aus den Postulaten der Assoziation [A] und Distribution [B] gebildete, die in der gewöhnlichen Weise die Begriffe der Geraden und der Ebene charakterisieren; ferner aus den Postulaten der Kongruenz [C] und aus dem Postulat des Archimedes [D].

In bezug auf dieses Fundamentalsystem, das wir mit $\{A, B, C, D\}$ bezeichnen werden, sind die folgenden Hypothesen untereinander und mit der von Euklid in seinem V. Postulat ausgesprochenen äquivalent.

a) Die inneren Winkel, die zwei Parallele mit einer Transversale auf derselben Seite bilden, sind supplementar [Ptolemäus].

b) Zwei parallele Gerade sind äquidistant.

c) Trifft eine Gerade die eine von zwei Parallelen, dann trifft sie auch die andere [Proclus]; oder: zwei zu einer dritten Geraden parallele Gerade sind untereinander parallel, oder auch: durch einen Punkt außerhalb einer Geraden geht eine und nur eine Parallele zu dieser Geraden.

d) Zu einem beliebigen Dreieck kann immer ein ähnliches Dreieck von beliebiger Größe konstruiert werden [Wallis].

e) Durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, geht immer eine Kugel [W. Bolyai].

f) Durch einen Punkt, der zwischen den Schenkeln eines Winkels liegt, geht immer eine Gerade, die die beiden Schenkel des Winkels trifft [Lorenz].

α) Wenn von zwei Geraden r, s die eine senkrecht und die andere geneigt gegen die Transversale AB ist, so sind die von den Punkten von s auf r gefällten Lote sämtlich kleiner als AB auf der Seite, wo AB mit s einen spitzen Winkel bildet [Nasîr-Eddîn].

β) Der Ort von einer Geraden gleichweit entfernter Punkte ist eine Gerade.

γ) Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich zwei Rechten [Saccheri].

Wir wollen jetzt das Fundamentalsystem von Hypothesen einschränken, indem wir von der Archimedischen Hypothese absehen. Dann sind die Sätze a), b), c), d), e), f) auch noch untereinander und mit dem V. euklidischen Postulat äquivalent in bezug auf das neue Fundamentalsystem $\{A, B, C\}$. Die Sätze α, β, γ sind zwar untereinander äquivalent in bezug auf das System $\{A, B, C\}$, aber keiner ist dem euklidischen Postulat äquivalent. Dieses Ergebnis, das die Stellung des Archimedischen Postulats hervortreten läßt, ist in einer schon zitierten Arbeit von M. Dehn [1900] enthalten.[1] In dieser Arbeit wird bewiesen, daß die Hypothese γ über die Winkelsumme im Dreieck nicht nur mit der gewöhnlichen elementaren Geometrie verträglich ist, sondern auch mit einer neuen, notwendigerweise nichtarchimedischen, wo das V. Postulat nicht gilt und wo durch einen Punkt unendlich viele Nichtschneidende hinsichtlich einer vor-

1) Vgl. S. 32 Anm. 1.

gezeichneten Geraden gehen. Dieser Geometrie gab der Verfasser den Namen: Semi-Euklidische Geometrie.

Die Verbreitung der nichteuklidischen Geometrie.

§ 60. Die Werke von Lobatschefskij und Bolyai fanden bei ihrem Erscheinen nicht die Aufnahme, die so viele Jahrhunderte langsamer und stetiger Vorbereitung zu versprechen schienen. Darüber darf man sich weiter nicht wundern, weil die Geschichte der Wissenschaft uns lehrt, daß jede radikale Änderung in den einzelnen Fächern nicht mit einem Schlag die Überzeugungen und die Vorurteile niedertritt, auf denen Forscher und Lehrer eine lange Zeit hindurch ihre Lehren errichteten.

In unserem Fall wurde die Zustimmung zur nichteuklidischen Geometrie aus besonderen Gründen verzögert, z. B. die Schwierigkeit, welche die Lektüre der russischen Werke von Lobatschefskij bereitete, die unbekannten Namen der beiden Neuerer und Kants damals herrschende Raumlehre.

Um die Dunkelheit zu zerstreuen, die in den ersten Jahren die neuen Lehren verhüllte, dienten die französischen und deutschen Schriften von Lobatschefskij, vor allem aber die beständige und unermüdliche Arbeit einiger Geometer, deren Namen jetzt mit der Verbreitung und dem Sieg der nichteuklidischen Geometrie verknüpft sind. Wir wollen hauptsächlich von C. L. Gerling [1788—1864], R. Baltzer [1818—1887] und Fr. Schmidt [1827—1901] in Deutschland sprechen; ferner von J. Hoüel [1823—1886], G. Battaglini [1826—1894], E. Beltrami [1835—1900] und A. Forti in Frankreich und in Italien.

§ 61. Gerling, der seit 1816 mit Gauß in Briefwechsel über die Parallelen stand[1]), und der ihm 1819 die Note von Schweikart über die „Astralgeometrie“ [vgl. S. 77] mitteilte, hatte von Gauß selbst [1832] und in Worten, die in ihm notwendig eine berechtigte Neugier erwecken mußten, die Angabe über eine „kleine Schrift“ über die nichteuklidische Geometrie, verfaßt von einem jungen österreichischen Offizier, dem Sohn von W. Bolyai.[2]) Die später erfolgte genaue Literaturangabe [1844] über die Werke von Lobatschefskij und Bolyai[3]) durch Gauß veranlaßte Gerling, sich die „Geometrischen Untersuchungen“ und den „Appendix“ zu verschaffen und sie so der Vergessenheit zu entreißen, in die sie verbannt zu sein schienen.

§ 62. Der von 1860—1863 veröffentlichte Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher[4]) und die Versuche von Legendre, auch in den elementaren Lehrbüchern strenge Ordnung in die Parallelentheorie zu bringen, veranlaßten Baltzer, in der zweiten Auflage seiner „Elemente der Mathematik“ [1867] die euklidische Definition der Parallelen zu ersetzen durch die aus dem neuen Raumbegriff abgeleitete und mit Loba-

1) Vgl. Bd. VIII der „Werke von Gauß“, S. 167—169.

2) Vgl. den Brief von Gauß an Gerling auf S. 220, Bd. VIII von „Gauß' Werken“. In diesem Brief spricht Gauß vom Inhalt des „Appendix“ und sagt: „worin ich alle meine eigenen Ideen und Resultate wiederfinde mit größter Eleganz entwickelt“ und vom Verfasser der Schrift: „Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Größe.“

3) „Gauß' Werke“, Bd. VIII, S. 234—38.

4) „Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher“, Bd. II, S. 268, 341; Bd. V, S. 246 [Altona 1860—63]. Über die damals bekannten Gedanken von Gauß siehe auch: Sartorius v. Waltershausen: „Gauß zum Gedächtnis“, S. 80—81 [Leipzig 1856]. Vgl. Gauß' Werke Bd. VIII, S. 267—68.

tschefskij die Beziehung: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, die das euklidische Dreieck charakterisiert, zu den experimentellen Eigenschaften zu rechnen. Um dann diese Neuerung zu rechtfertigen, verfehlte Baltzer nicht, eine kurze Andeutung über die theoretische Möglichkeit einer Geometrie zu entwickeln, die allgemeiner ist als die gewöhnliche und die sich auf die Annahme von zwei Parallelen gründet, ferner die Namen ihrer Begründer ins rechte Licht zu setzen.[1]) Zur selben Zeit lenkte Hoüel, dessen Interesse für Fragen der elementaren Geometrie wohlbekannt war, im Gebiete der Wissenschaft das Interesse auf die nichteuklidische Geometrie[2]) und wurde durch sein Interesse angespornt, die „Geometrischen Untersuchungen" und den „Appendix" ins Französische zu übersetzen.

§ 63. Die französische Übersetzung des Werkchens von Lobatschefskij erschien 1866 zusammen mit der eines kurzen Auszuges des Briefwechsels zwischen Gauß und Schumacher[3]). Die so erhaltene Nebeneinanderstellung der Gedanken von Lobatschefskij-Bolyai und derer von Gauß war äußerst fruchtbar, weil der Name Gauß und seine Zustimmung zu den Entdeckungen

---

1) Vgl. die „Elemente der Mathematik" von Baltzer, Bd. II, 5. Aufl., S. 12—14 [Leipzig 1878]. Bd. IV, S. 5—7, 24—31 der italienischen Übersetzung von L. Cremona [Genova 1867].

2) Hoüel hatte damals schon veröffentlicht seinen berühmten: *„Essai d'une exposition rationelle des principes fondamenteaux de la Géométrie élémentaire"*. Arch. d. Math. u. Phys., Bd. 40 [1863].

3) Mémoires de la Société des Sciences Phys. et Naturelles de Bordeaux t. IV, p. 88—120 [1866]. Sie wurde auch in einem besonderen Werkchen veröffentlicht mit dem Titel: *„Études géométriques sur la théorie des parallèles"* par N. J. Lobatschefskij, Conseiller d'État de l'Empire de Russie et Professeur à l'Université de Kasan; traduit de allemand par J. Hoüel, *Suivie d'un Extrait de la correspondence de Gauß et de Schumacher*. [Paris G. Villars, 1866.]

der beiden damals verborgenen und unbekannten Geometer beitrug, in der wirksamsten und sichersten Weise der neuen Lehre Glauben und Geltung zu verschaffen.

Die französische Übersetzung des „Appendix" erschien 1867[1]), begleitet von einer vorausgehenden „*Notice sur la vie et les travaux des deux mathématiciens hongrois W. et J. Bolyai de Bolya*", die vom Architekten Fr. Schmidt auf Ersuchen von Hoüel[2]) geschrieben war, und nachfolgenden Bemerkungen von W. Bolyai, die aus dem 1. Band seines „Tentamen" entnommen waren und aus einem zusammenfassenden Werkchen von Wolfgang über die Grundlagen der Arithmetik und der Geometrie.[3])

Die von Schmidt gesammelten Angaben über die beiden Bolyai wurden gleichzeitig [1867] im „Archiv d. Math. u. Phys." veröffentlicht und im folgenden Jahr machte A. Forti, der schon einen historisch-kritischen Artikel über Lobatschefskij[4]) geschrieben hatte, die

1) Mém. Soc. Scienc. Phys. et Nat. de Bordeaux, t. V, p. 189—248. Sie erschien auch besonders in einem Werkchen des Titels: „*La science absolue de l'espace, indépendante de la vérité ou fausseté de l'Axiome XI d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir a priori): suivie de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fausseté de l'Axiome XI,* par Jean Bolyai, Capitaine au corps du génie dans l'armée autrichienne; *Précédé d'une notice sur la vie et les travaux de W. et de J. Bolyai,* par M. Fr. Schmidt" [Paris, G. Villars, 1868].

2) Vgl. P. Stäckel: „Franz Schmidt", Jahresberichte der Deutschen Math.-Ver., Bd. XI, S. 141—46 [1902].

3) Dieses Werkchen von W. Bolyai wird gewöhnlich kurz mit den ersten Worten seines Titels zitiert: „Kurzer Grundriß". Es wurde 1851 in Maros-Vásárhely gedruckt.

4) *Intorno alla geometria immaginaria o non euclidiana. Considerazioni storico-critiche;* Rivista Bolognese di scienze, lettere, arti e scuole, t. II, p. 171—84 [1867]. Er wurde besonders gedruckt in einem Werkchen von 16 Seiten [Bologna, Fava e Garagnani 1867]. Dieselbe Schrift mit verschiedenen Zusätzen und unter dem Titel: „*Studii geometrici sulla teorica delle parallele di N. J. Lobatschewsky*" wurde abgedruckt in dem politischen Journal

Italiener mit den Namen und den Werken der nunmehr berühmten ungarischen Mathematiker bekannt.[1])

Zu Ehren von Houël muß auch sein Interesse für die Manuskripte von Johann Bolyai erwähnt werden, die damals [1867] kraft einer testamentarischen Verfügung von Wolfgang in der Bibliothek des reformierten Kollegiums von Maros-Vásárhely verwahrt wurden. Durch Vermittlung des Fürsten B. Boncampagni [1821—1894], der seinerseits den ungarischen Kultusminister Baron Eötvös dafür interessierte, erreichte er, daß sie [1869] bei der ungarischen Akademie der Wissenschaften in Budapest[2]) hinterlegt wurden und so Gegenstand der Geduld erfordernden und sorgfältigen Studien von Schmidt, neuerdings von Stäckel werden konnten.

Überdies verfehlte Houël bei der allerverschiedensten Gelegenheit nicht sich zu bemühen, daß der nichteuklidischen Geometrie ein dauernder Triumph gesichert würde; es genüge, seinen „*Essai critique sur les principes fondamenteaux de la géométrie*“[3]) anzuführen, die Artikel „*Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide*“[4]), die „*Notices sur la vie et*

„La Provincia di Pisa“, Jahrgang III, No. 25, 27, 29, 30 [1867] und zum Teil wieder veröffentlicht unter dem ursprünglichen Titel [Pisa, Nistri, 1867].

1) Vgl.: „*Intorno alla vita ed agli scritti di Wolfgang e Giovanni Bolyai di Bolya, matematici ungheresi*“, Bolletino di Bibliographia e di Storia delle scienze Mat. e Fisiche, t. I, p. 277—299 [1869]. Dieser Artikel von Forti ist bereichert durch umfängliche historische und bibliographische Anmerkungen von B. Boncompagni.

2) Vgl. den oben im Text zitierten Artikel von Stäckel über Fr. Schmidt.

3) 1. Aufl. Paris, G. Villars, 1867; 2. Aufl. 1883. (Vgl. Anm. 2 S. 55.)

4) Giornale di Matematiche, t. VII, p. 84—89; Nouvelles Annales (2), t. IX, p. 93—96.

les travaux de N. J. Lobatschefskij“ [1]), endlich seine französischen Übersetzungen verschiedener Schriften über die nichteuklidische Geometrie [2]), um einzusehen, welch glühenden Apostel sie in dem berühmten französischen Mathematiker gefunden hat.

§ 64. Mit ebenso viel Überzeugung wie Eifer führte in Italien Giuseppe Battaglini die neuen geometrischen Spekulationen ein und verbreitete sie, und das von ihm gegründete und geleitete „Giornale di Matimatica“ war von 1867 an das gleichsam amtliche Organ für die nichteuklidische Geometrie.

Der ersten Arbeit von Battaglini: „*Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky*“ [3]), die geschrieben ist, um unmittelbar das Prinzip aufzustellen, welches zur Grundlage der allgemeinen Parallelentheorie und der Lobatschefskijschen Geometrie dient, folgt wenige Seiten darauf die italienische Übersetzung der „Pangeometrie“ [4]), und auf diese 1868 die Übersetzung des „Appendix“. Gleichzeitig kam im 6. Band des „Giornale di Matematica“ das berühmte „*Saggio di inter-*

1) Bull. des Sciences Math., t. I, p. 66—71, 324—28, 384—88 [1870].

2) Außer den Übersetzungen, von denen im Text die Rede ist, übersetzte Hoüel eine Schrift von G. Battaglini [vgl. die folgende Anm.], zwei von Beltrami [vgl. S. 134, Anm. 1; S. 157 Anm.], eine von Riemann [vgl. S. 147, Anm. 1] und eine von Helmholtz [vgl. S. 162].

3) Giornale di Mat., t. V, p. 217—31 [1867]. — Napoli, Rend. Acc. Science Fis. e Matem., t. VI, p. 157—73 [1867]. — Französische Übersetzung von Hoüel: Nouv. Annales, t. VII, p. 209—21, 265—77 [1868].

4) Sie wurde auch besonders gedruckt in einem Werkchen mit dem Titel: „*Pangeometria o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele*“. Napoli 1867, 2. Aufl. 1874.

pretazione della geometria non euclidea"[1]) von E. Beltrami heraus, „das ein unerwartetes Licht auf die damals schwebende Streitfrage über die grundlegenden Prinzipien der Geometrie und über die Ideen von Gauß und Lobatschefskij warf".[2])

Blättert man die folgenden Jahrgänge des „Giornale di Matematica" auf, so begegnet man häufig Schriften über die nichteuklidische Geometrie: zwei von Beltrami [1872], die sich an den vorgenannten „Saggio" anschließen, verschiedene von Battaglini [1874—78] und d'Ovidio [1875—77], die einige Fragen der neuen Geometrie mit den von Cayley geschaffenen projektiven Methoden behandeln; die von Hoüel [1870] über die Unbeweisbarkeit des euklidischen Postulats; andere von Cassini [1873—81], Günther [1876], De Zolt [1877], Frattini [1878], Ricordi [1880] usw.

§ 65. Das Werk der Verbreitung, das von den vorgenannten Geometern begonnen war und mutig fortgeführt wurde, gab auch einen sehr wirksamen Anstoß für eine andere Gruppe von Veröffentlichungen, wo um jene Zeit herum [1868—72] das Problem der Grundlagen der Geometrie in allgemeinerer und höherer Form aufgeworfen wurde, als sie die elementaren Untersuchungen von Gauß, Lobatschefskij und Bolyai betraf. Neue Methoden und Richtungen, mit denen die Namen von einigen der bedeutendsten zeitgenössischen Mathematiker und Philosophen verknüpft sind, werden wir kurz in Kapitel V besprechen; hier genügt die Bemerkung, daß

1) Ins Französische übersetzt von Hoüel in den Annales Scient. de l'École Normale Sup., p. 251—88, t. VI [1869].

2) Vgl. die „*Commemorazione di E. Beltrami*" von L. Cremona, Giornale di Mat., t. XXXVIII, p. 362 [1900], sowie den Nachruf von E. Pascal (Math. Annalen 57, S. 65—107, Leipzig 1903).

die alte Parallelenfrage, der die Untersuchungen von Legendre 40 Jahre zuvor alles Interesse entzogen zu haben schienen, noch immer und unter einem ganz neuen Gesichtspunkt die Aufmerksamkeit der Geometer und Philosophen auf sich zog und Mittelpunkt für ein sehr weites Feld von Untersuchungen wurde. Einige von ihnen hatten einfach den Zweck, dem großen mathematischen Publikum die Werke der Begründer der nichteuklidischen Geometrie leichter zugänglich zu machen, andere zielten auf Erweiterung der Ergebnisse, des Inhalts und der Bedeutung der neuen Lehre, wobei sie zu gleicher Zeit zum Fortschritt gewisser besonderer Zweige der höheren Mathematik beitrugen.[1])

1) Vgl. z. B. E. Picard: „*La Science Moderne et son état actuel*“, S. 75. [Paris, Flammarion 1905.]

Fünftes Kapitel.

Die weitere Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie.

§ 66. Um über die weiteren Fortschritte der nichteuklidischen Geometrie nach der Seite der Differentialgeometrie und der projektiven Geometrie hin Rechenschaft zu geben, müssen wir das elementare Gebiet verlassen, um von einigen höheren mathematischen Theorien zu sprechen, wie der Differentialgeometrie auf Mannigfaltigkeiten, der Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen, der reinen projektiven Geometrie [System von Staudt] und den ihr untergeordneten metrischen Geometrien. Da es nicht mit der Anlage dieses Werkes im Einklang ist, auf diese höheren Fragen auch nur summarisch einzugehen, wollen wir uns allein auf die Dinge beschränken, die notwendig sind, um dem Leser den Geist verständlich zu machen, der die neue Forschung leitet, und ihn zu einem andern geometrischen System geleiten, das man Riemann verdankt und das die vorhergehenden Untersuchungen grundsätzlich ausschlossen, weil sie die Unendlichkeit der Geraden annahmen. Dieses System ist unter dem Namen seines Begründers bekannt und entspricht der Hypothese des stumpfen Winkels von Saccheri und Lambert.[1])

1) Wer eine ausführliche Entwicklung der in diesem Kapitel behandelten Gegenstände wünscht, kann heranziehen F. Kleins



Differentialgeometrische Richtung.

Die Geometrie auf einer Fläche.

§ 67. Um das Ziel leicht zu erreichen, wollen wir von den folgenden Betrachtungen ausgehen.

Wenn eine Oberfläche gegeben ist, wollen wir uns vornehmen zu untersuchen, bis wie weit man auf ihr eine Geometrie begründen kann, die der auf der Ebene analog ist.

Durch zwei Punkte A, B der Oberfläche geht im allgemeinen eine wohl bestimmte Linie hindurch, die ihr angehört und die auf der Fläche den kürzesten Abstand zwischen den beiden Punkten angibt. Diese Linie ist die die beiden gegebenen Punkte verbindende geodätische. Zieht man z. B. auf einer Kugel die geodätische Linie, die zwei Punkte [die nicht Endpunkte desselben Durchmessers sind] verbindet, so ist es ein Bogen des größten Kreises, den sie bestimmen.

Wollen wir jetzt die Geometrie auf einer Fläche mit der Geometrie auf der Ebene vergleichen, so erscheint es natürlich, die Geodätischen auf ihr, die doch die Entfernungen auf der Oberfläche messen, den Geraden entsprechen zu lassen und auch als [geodätisch] gleich zwei auf einer Fläche gezeichnete Figuren zu betrachten, die man Punkt für Punkt in Beziehung bringen kann, so daß die geodätischen Abstände zwischen den Paaren entsprechender Punkte gleich sind.

Zu diesem Begriff der Gleichheit kann man in anschaulicher Form gelangen, wenn man annimmt, daß die Fläche verwirklicht ist durch ein biegsames und un-

---

„Vorlesungen über die nichteuklidische Geometrie“ [Göttingen 1893] und die „*Lezioni sulla geometria differenziale*“ von L. Bianchi, t. 1, Kap. XI, XII, XIII, XIV, p. 326—513 [Pisa, Spörri, 1903]. — Die erste Auflage erschien auch deutsch (übersetzt von Lukat). Leipzig 1899.

ausdehnbares Blatt, und daß bei einer Bewegung der Oberfläche, wobei sie nicht starr bleibt, sondern sich biegt so wie es eben gesagt wurde, die von uns gleich genannten Figuren der Oberfläche übereinandergeschoben werden können.

Nehmen wir z. B. ein Stück einer zylindrischen Oberfläche, das durch einfache Biegung ohne Dehnung, Faltung und Riß auf ein ebenes Gebiet abgewickelt werden kann. Es ist klar, daß in diesem Fall auf der Fläche zwei Figuren gleich genannt werden müssen, die sich auf gleiche ebene Figuren ausbreiten; wohlverstanden, im Raume sind die genannten Figuren im allgemeinen nicht gleich.

Kehren wir jetzt zu einer beliebigen Oberfläche zurück, so wird das oben angegebene System von Festsetzungen Grundlage für eine Geometrie auf der Fläche, welche wir immer in geeignet abgegrenzten Gebieten [Normalregionen] betrachten wollen. Zwei aufeinander mit Biegung ohne Dehnung abwickelbare Flächen werden dieselbe Geometrie haben; so wird man z. B. auf einer beliebigen Zylinderfläche und allgemein auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche eine Geometrie ähnlich der auf einer ebenen Fläche haben.

Ein Beispiel für eine von der ebenen Geometrie wesentlich verschiedene Geometrie auf einer Fläche ist uns gegeben durch die Geometrie auf der Kugel, weil es unmöglich ist, einen Teil der Kugel auf die Ebene abzuwickeln. Trotzdem haben wir zwischen der ebenen Geometrie und der auf der Kugel eine wichtige Analogie: diese Analogie hat ihren Grund in der Tatsache, daß die Kugel frei in sich bewegt werden kann, genau wie die Ebene; so daß für gleiche Figuren auf der Kugel Sätze gelten, die im ganzen den Postulaten der Kongruenz auf der Ebene entsprechen.

Suchen wir dieses Beispiel zu verallgemeinern. Da-

mit eine geeignet begrenzte Fläche durch Biegung allein ohne Zerrung in sich bewegt werden kann, wie die Ebene, muß eine bestimmte Zahl $[K]$, die eine Invariante bezüglich der genannten Biegungen ist, einen konstanten Wert in allen Punkten der Fläche haben. Diese Zahl ist von Gauß unter dem Namen Krümmung[1]) eingeführt.

Man kann in der Tat Flächen mit konstanter Krümmung konstruieren, wobei folgende drei möglichen Fälle zu unterscheiden sind:

$$K = 0, \quad K > 0, \quad K < 0.$$

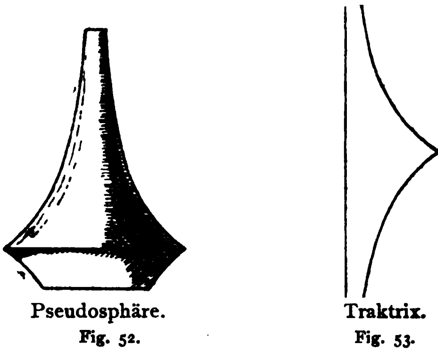
Für $K = 0$ hat man die abwickelbaren Flächen [die auf die Ebene abwickelbar sind]. Für $K > 0$ hat man die auf eine Kugeloberfläche vom Radius $\sqrt{1 : K}$ abwickelbaren Flächen und die Kugel kann als ihr Modell betrachtet werden.

---

1) Erinnert man sich, daß die Krümmung einer ebenen Linie in einem Punkt das Reziproke des Krümmungskreises in diesem Punkt ist, so kann man die Krümmung der Fläche in einem Punkt M so definieren.

Nachdem durch M die Normale n zur Oberfläche gezogen ist, betrachte man das Büschel von Ebenen durch n und das entsprechende Kurvenbüschel, das sie aus der Fläche ausschneiden. Unter den [ebenen] Kurven dieses Büschels gibt es deren zwei, deren [oben definierte] Krümmungen die Maximum- resp. Minimumeigenschaft besitzen. Das Produkt dieser Krümmungen gibt die Krümmung der Fläche im Punkte M [Gauß]. Der Gaußschen Krümmung kommt auch eine scharf hervortretende Eigenschaft zu: sie bleibt ungeändert bei aller Biegung ohne Dehnung, so daß, wenn zwei Oberflächen aufeinander abwickelbar sind in dem im Text angegebenen Sinn, sie in entsprechenden Punkten dieselbe Krümmung haben müssen [Gauß]. Dies Ergebnis, das von Minding im Fall der Flächen konstanter Krümmung umgekehrt wurde, zeigt deutlich, daß die frei über sich selbst hin bewegbaren Flächen durch die konstante Krümmung charakterisiert sind.

Für $K < 0$ hat man die auf die Pseudosphäre abwickelbaren Flächen, die als Modell für die Oberflächen konstanter negativer Krümmung angenommen werden kann.



Pseudosphäre.
Fig. 52.

Traktrix.
Fig. 53.

Die Pseudosphäre ist eine Rotationsfläche: Die Gleichung der Meridiankurve [Traktrix[1])] ist, bezogen auf die Rotationsachse z und auf eine Gerade x, die senkrecht zu z geeignet gewählt ist:

$$(1) \qquad z = k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} - \sqrt{k^2 - x^2},$$

wo k mit der Krümmung K verknüpft ist durch die Beziehung:

$$K = -\frac{1}{k^2}.$$

Auf die von (1) erzeugte Pseudosphäre kann jeder Teil seiner Fläche konstanter Krümmung $-\frac{1}{k^2}$ ausgebreitet werden.

---

1) Die Traktrix ist die Kurve, bei der der Abschnitt der Tangente zwischen dem Berührungspunkt und der Asymptote konstante Länge hat.



Fläche konstanter negativer Krümmung.[1])

Fig. 54.

§ 68. Zwischen der Geometrie auf einer Fläche konstanter Krümmung und der von einem Teil der Ebene, wobei alle beide in geeigneten Grenzen zu nehmen sind, besteht eine Analogie, die wir ins Licht setzen können, indem wir die Grundeigenschaften der einen übersetzen in die der anderen, wie dies summarisch durch die Gegenüberstellung von Sätzen angegeben wird, die wir im folgenden Bilde bemerken:

a) Fläche.	a) Teil der Ebene.
b) Punkt.	b) Punkt.

1) Die Oberfläche, von der Fig. 54 eine photographische Reproduktion ist, wurde von Beltrami konstruiert. Jetzt gehört sie zur Modellsammlung des Mathematischen Institutes der Universität in Pavia.

c) Geodätische Linie.	c) Gerade.
d) Bogen einer geodätischen Linie.	d) Geradlinige Strecke.
e) Lineare Eigenschaften der geodätischen Linie.	e) Postulate über die Anordnung der Punkte einer Geraden.
f) Zwei Punkte bestimmen eine geodätische Linie.	f) Zwei Punkte bestimmen eine Gerade.
g) Fundamentaleigenschaften der Gleichheit der geodätischen Bögen und der Winkel.	g) Postulate der Strecken- und Winkelkongruenz.
h) Wenn in zwei geodätischen Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind, so sind auch die übrigen Seiten und die übrigen Winkel gleich.	h) Wenn in zwei geradlinigen Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind; dann sind auch die übrigen Seiten und Winkel gleich.

Es folgt, daß man als gemeinsam für die Geometrie aller dieser Oberflächen alle die Eigenschaften festhalten kann, die bei der euklidischen Anordnung unabhängig vom Parallelenpostulat sind und bei deren Beweis man nicht von der vollständigen Ebene Gebrauch macht [z. B. von der Unendlichkeit der Geraden].

Wir wollen jetzt in der Gegenüberstellung der Sätze im begrenzten Gebiet der Ebene fortfahren, die mit der euklidischen Hypothese verknüpft sind, und der entsprechenden auf der Fläche. Man hat z. B. den Satz, daß auf der Ebene die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten ist. Die entsprechende Eigenschaft gilt nicht allgemein auf der Fläche.

In der Tat bewies Gauß, daß auf einer Fläche mit konstanter oder von Punkt zu Punkt veränderlicher Krümmung K das Doppelintegral

$$\int K d\sigma$$

über die ganze Oberfläche eines geodätischen Dreiecks ABC erstreckt dem Überschuß seiner drei Winkel über zwei Rechte gleich ist.[1]) D. h.:

$$\int_{ABC} K d\sigma = \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C - \pi.$$

Wenden wir diese Formel auf die Oberflächen konstanter Krümmung an, wobei wir die drei möglichen Fälle unterscheiden:

1. Fall. $K = 0.$

Dann werden wir haben:

$$\int_{ABC} K d\sigma = 0, \quad \text{also} \quad \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = \pi.$$

Auf den Flächen mit konstanter Krümmung Null ist die Summe der Winkel eines geodätischen Dreiecks gleich zwei rechten Winkeln.

Dieses Ergebnis war uns übrigens schon bekannt.

2. Fall. $K = \frac{1}{k^2} > 0.$

Dann werden wir haben:

$$\int_{ABC} K d\sigma = \frac{1}{k^2} \int_{ABC} d\sigma.$$

Aber das Integral: $\int d\sigma$ gibt über das Dreieck ABC erstreckt die Fläche dieses Dreiecks, so daß:

$$\frac{\Delta}{k^2} = \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C - \pi.$$

---

1) Vgl. z. B. die genannten „*Lezioni sulla geometria differenziale*" von L. Bianchi, Kap. VI.

Aus dieser Beziehung erhalten wir:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C > \pi,$$
$$\Delta = k^2(A + B + C - \pi).$$

D. h.:

a) Auf den Flächen konstanter positiver Krümmung ist die Summe der Winkel eines geodätischen Dreiecks größer als zwei rechte Winkel.

b) Der Flächeninhalt eines geodätischen Dreiecks ist proportional dem Überschuß seiner drei Winkel über zwei rechte Winkel.

3. Fall. $$K = -\frac{1}{k^2}.$$

Dann werden wir haben:

$$\int\limits_{ABC} K d\sigma = -\frac{1}{k^2}\int\limits_{ABC} d\sigma = -\frac{\Delta}{k^2},$$

wo wir auch hier mit Δ den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bezeichnet haben. Es folgt dann:

$$\frac{\Delta}{k^2} = \pi - (\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C),$$

woraus die beiden folgenden Beziehungen abgeleitet werden:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C < \pi,$$
$$\Delta = k^2(\pi - \sphericalangle A - \sphericalangle B - \sphericalangle C).$$

D. h.:

a) Auf den Oberflächen konstanter negativer Krümmung ist die Summe der drei Winkel eines geodätischen Dreiecks kleiner als zwei rechte Winkel.

b) Der Flächeninhalt eines geodätischen Dreiecks ist proportional dem Defekt der Summe seiner drei Winkel an zwei Rechten.

Fassen wir noch die Ergebnisse auf folgender Tabelle zusammen:

Flächen konstanter Krümmung.

Wert der Krümmung	Modell für die Fläche	Dreieckscharakter
$K = 0$	Ebene	$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = \pi$
$K = \frac{1}{k^2}$	Kugel	$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C > \pi$
$K = -\frac{1}{k^2}$	Pseudosphäre	$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C < \pi$

Die Geometrie der Oberflächen der Krümmung Null und der von konstanter positiver Krümmung ist uns bekannt, weil sie der ebenen euklidischen Geometrie und der sphärischen Geometrie entspricht.

Das Studium der Flächen konstanter negativer Krümmung wurde von F. Minding [1806—1885] begonnen mit der Untersuchung der Rotationsflächen, auf welche sie abgewickelt werden können.[1]) Die folgende Bemerkung von Minding, die ausführlich von D. Codazzi [1824—1873] entwickelt wurde, erlaubt dann eine Trigonometrie dafür anzugeben. Wenn man in den trigonometrischen Formeln für die Kugel die Winkel festhält und die Seiten mit $i = \sqrt{-1}$ multipliziert, so erhält man die Beziehungen, denen die Elemente eines geodätischen Dreiecks genügen auf den Flächen konstanter nega-

1) „Wie sich entscheiden läßt, ob zwei gegebene krumme Flächen aufeinander abwickelbar sind oder nicht, nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaße“: Crelle, Bd. XIX, S. 370—87 [1839].

tiver Krümmung.[1]) Diese Beziehungen [pseudosphärische Trigonometrie] fallen augenscheinlich mit denen von Taurinus zusammen, d. h. mit den Formeln der Geometrie von Lobatschefskij-Bolyai.

§ 69. Aus den vorhergehenden Paragraphen ergibt sich, daß die Eigenschaften, die sich auf die Winkelsumme im Dreieck in der Geometrie der Oberflächen konstanter Krümmung beziehen resp. entsprechen:

für $K = 0$, den in der Ebene gültigen kraft der Hyp. d. r. Winkel;

für $K > 0$, denen, die bei Geltung der Hyp. d. st. Winkels bestehen würden;

für $K < 0$, den in der Ebene kraft der Hyp. d. sp. Winkels gültigen.

Das erste dieser Ergebnisse ist a priori evident, weil es sich um die abwickelbaren Flächen handelt.

Die Analogie zwischen der Geometrie auf den Flächen konstanter negativer Krümmung z. B. und der Lobatschefskij-Bolyaischen Geometrie könnte man noch deutlicher machen, wenn man die Beziehungen zwischen den Elementen der auf diesen Flächen gezogenen geodätischen Dreiecke und die Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie einander gegenüberstellte. Ein solcher Vergleich wurde von E. Beltrami in seinem „*Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*“[2]) gemacht.

---

1) Minding: „Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen“: Crelle, Bd. XX, S. 323—27 [1840]. D. Codazzi: „*Intorno alle superficie, le quali hanno costante il prodatto de' due raggi di curvatura*“; Ann. di Scienze Mat. e Fis., t. VIII, p. 346—55 [1857].

2) Giorn. di Matem., t. VI, p. 284—312 [1868]. — Opere Mat., t. I, p. 374—405 [Höpli 1902].

Es ergibt sich so, daß die Geometrie auf einer Oberfläche konstanter positiver oder negativer Krümmung betrachtet werden kann als eine konkrete Deutung der nichteuklidischen Geometrie, die man auf einem begrenzten Gebiet der Ebene bei Annahme der Hyp. des stumpfen Winkels oder der des spitzen Winkels erhält.

Die Möglichkeit, die Geometrie zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten mittels der gewöhnlichen Flächen zu deuten, war B. Riemann [1826—1866] bekannt seit 1854, in welchem Jahr er seine berühmte Habilitationsschrift verfaßte: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ [1]), die als Grundpfeiler der differentialgeometrischen Richtung ragt.

---

1) „Riemanns Werke“, 1. Aufl. [1876], S. 254—69; 2. Aufl. [1892], S. 272—87. Sie wurde 1854 von Riemann verlesen bei seiner Habilitation an der philosophischen Fakultät in Göttingen, vor einem nicht nur aus Mathematikern zusammengesetzten Publikum. Deswegen enthält sie keine analytischen Entwicklungen und die dort auseinandergesetzten Begriffe haben vorwiegend anschauliche Form. Einige analytische Erklärungen finden sich in den Anmerkungen der von Riemann als Antwort auf eine Preisfrage der Pariser Akademie eingeschickten Abhandlung [Riemanns Werke, 1. Aufl., S. 384—91; 2. Aufl., S. 391—404].

Die philosophische Grundlage der „Habilitationsschrift“ ist das Studium der Dinge nach ihrem Verhalten im unendlich Kleinen. Vgl. die Rede von Klein: „Riemann und seine Bedeutung in der Entwicklung der modernen Mathematik“, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 4, S. 71—82, Berlin 1894, übersetzt ins Italienische von E. Pascal, Annali di Mat. (2), t. XXIII, [S. 222].

Die „Habilitationsschrift“ wurde erst 1867 [Gött. Abh. XIII] nach dem Tode des Verfassers veröffentlicht von Dedekind, dann ins Französische übersetzt von J. Hoüel [Annali di Mat. (2), t. III, 1870; Oeuvres Math. de Riemann, 1876], ins Englische von W. Clifford [Nature, t. VIII, 1873] und von G. B. Halsted [Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji, t. VII, 1895], ins Polnische von Dickstein [Comm. Acad. Litt. Cracoviensis, t. IX,

Die Deutung von Beltrami stellt sich als besonderer Fall der Riemannschen dar. Sie zeigt uns durch die Eigenschaften der Flächen konstanter Krümmung klar, wie die Kette der aus den drei Hypothesen über die Winkelsumme eines Dreiecks gewonnenen Folgerungen zu logisch zusammenhängenden geometrischen Systemen führen muß.

Dieser Schluß scheint, was die Hyp. d. stumpfen Winkels angeht, den Lehrsätzen von Saccheri, Lambert und Legendre zu widersprechen, die die Möglichkeit einer auf die genannte Hypothese gegründeten Geometrie von Anfang an ausschließen. Der Widerspruch wird übrigens leicht entfernt, wenn man bedenkt, daß bei dem Beweis jener Lehrsätze nicht nur Fundamentaleigenschaften benützt werden, die sich auf ein beschränktes Gebiet der Ebene beziehen, sondern auch Eigenschaften der vollständigen Ebene, z. B. die Unbegrenztheit der Geraden.

Grundlagen einer ebenen Geometrie nach Riemanns Ideen.

§ 70. Die vorhergehenden Bemerkungen führen uns zur Grundlegung einer metrischen Geometrie, die vom Euklidschen Postulat absieht und einen allgemeineren Gesichtspunkt einnimmt als der obige.

a) Wir setzen fest, daß wir von einem begrenzten Teil der Ebene ausgehen [Normalregion], nicht von der ganzen Ebene;

b) wir lassen als Postulate die elementaren Sätze zu, die unserer sinnlichen Wahrnehmung

---

1877], ins Russische von D. Sintsoff [Berichte der math.-phys. Gesellschaft an der kaiserlichen Universität Kasan (2), t. III, Anhang 1893].

entnommen sind; Sätze, die sich auf die Bestimmbarkeit der Geraden beziehen, auf Kongruenz usw.;

c) wir setzen fest, daß die Eigenschaften des Anfangsgebiets auf die Umgebung eines beliebigen Punktes der Ebene ausgedehnt werden können [wir sagen nicht auf die vollständige mit einem Blick umfaßte Ebene].

Die auf Grundlage dieser Prinzipien entwickelte Geometrie wird die allgemeinste ebene Geometrie sein, die mit den Angaben verträglich ist, welche das Ergebnis unserer Erfahrungen im strengen Sinn genommen, aber unter Beschränkung auf ein zugängliches Gebiet ausdrücken.

Auf Grund des in § 69 Gesagten ist es klar, daß die genannte Geometrie eine konkrete Deutung in der der Flächen konstanter Krümmung finden wird.

Aber dieses Entsprechen besteht nur vom [differentiellen] Gesichtspunkt aus, wo nur begrenzte Gebiete verglichen werden. Stellt man sich aber auf den [integralen] Standpunkt, wobei die Geometrie der ganzen Ebene und die Geometrie auf einer Fläche verglichen wird, so besteht das Entsprechen nicht mehr. Man kann in der Tat unter diesem Gesichtspunkt schon keineswegs sagen, daß auf zwei Flächen derselben konstanten Krümmung dieselbe Geometrie gilt. So hat z. B. ein Kreiszylinder die Krümmung Null und ein Gebiet von ihm kann auf ein Gebiet der Ebene abgewickelt werden, aber der ganze Zylinder ist nicht in dieser Weise auf die ganze Ebene abwickelbar. Die Geometrie des unbegrenzten Zylinders unterscheidet sich von der der unbegrenzten euklidischen Ebene. In der Tat gibt es auf dem Zylinder geschlossene geodätische Linien [Kreisschnitte] und im allgemeinen treffen sich zwei geodätische Linien auf ihm [Schraubenlinien], in einer

unendlichen Anzahl von Punkten, also erst recht in zwei Punkten.

Entsprechende Unterschiede werden im allgemeinen bestehen zwischen einer der metrischen nichteuklidischen Geometrien, die man auf die Basis der oben ausgesprochenen Postulate begründen könnte, und der Geometrie auf einer entsprechenden Fläche konstanter Krümmung.

Wenn wir versuchen, die Geometrie auf einer Fläche konstanter Krümmung [z. B. auf der Kugel oder auf der Pseudosphäre] im vollen Sinn zu umfassen, so sehen wir im allgemeinen, daß die Haupteigenschaft einer Normalregion hinsichtlich der durch zwei Punkte gehenden geodätischen Linie zu gelten aufhört. Diese Tatsache ist aber keine notwendige Folge der Hypothesen, auf die sich im oben ausgesprochenen Sinn eine allgemeine metrische nichteuklidische Geometrie der Ebene gründet. In der Tat, wenn man fragt, ob ein System der ebenen Geometrie logisch möglich ist, das den Bedingungen a), b), c) genügt und so beschaffen ist, daß die Kongruenzpostulate und das über die Bestimmung einer Geraden in der vollständigen Ebene gelten, so erhält man außer dem gewöhnlichen euklidischen System die beiden folgenden Systeme:

1. Das System von Lobatschefskij-Bolyai, das uns schon begegnet ist, wo durch einen Punkt zwei Parallele zu einer Geraden gehen.

2. Ein neues System [das sog. Riemannsche], das der Hypothese des stumpfen Winkels von Saccheri entspricht, und wo es keine Parallelen gibt.

In diesem letzteren System ist die Gerade eine geschlossene Linie von endlicher Länge: man vermeidet dadurch den Widerspruch, dem man entgegengehen würde bei der Annahme der offenen [unendlichen] Linie, eine Hypothese, von der man beim Beweis des Satzes

vom Außenwinkel bei Euklid und einiger Ergebnisse von Saccheri Gebrauch macht.

§ 71. Der erste, der die Existenz eines mit der Hyp. d. stumpfen W. verträglichen Systems bemerkte, war Riemann, weil er zuerst die Hypothese der unendlichen Geraden durch die andere allgemeinere der unbegrenzten Geraden ersetzt hat. Der hier auftretende Unterschied zwischen unendlich und unbegrenzt ist von grundlegender Bedeutung. Führen wir zu diesem Zweck die Worte von Riemann an: „Bei der Ausdehnung der Raumkonstruktionen ins Unmeßbargroße ist Unbegrenztheit und Unendlichkeit zu scheiden; jene gehört zu den Ausdehnungsverhältnissen, diese zu den Maßverhältnissen. Daß der Raum eine unbegrenzte dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sei, ist eine Voraussetzung, welche bei jeder Auffassung der Außenwelt angewandt wird, nach welcher in jedem Augenblick das Gebiet der wirklichen Wahrnehmungen ergänzt und die möglichen Orte eines gesuchten Gegenstandes konstruiert werden und welche sich bei diesen Anwendungen fortwährend bestätigt. Die Unbegrenztheit des Raumes besitzt daher eine größere empirische Gewißheit, als irgendeine äußere Erfahrung. Hieraus folgt aber die Unendlichkeit keineswegs; vielmehr würde der Raum, wenn man Unabhängigkeit der Körper vom Ort voraussetzt, ihm also ein konstantes Krümmungsmaß zuschreibt, notwendig endlich sein, sobald dieses Krümmungsmaß einen noch so kleinen positiven Wert hätte.[1]"

Schließlich ist das Postulat, das der Geraden eine unendliche Länge zuweist, worüber Einverständnis herrscht bei den Untersuchungen der früheren Geometer, für Riemann nicht weniger bestreitbar als das Parallelen-

---

1) Vgl. die „Habilitationsschrift" von Riemann, Teil III, § 2.

postulat: was Riemann für unbestreitbar hält, ist die Unbegrenztheit des Raumes, eine Eigenschaft die verträglich ist sowohl mit der Hypothese der unendlichen [offenen] Geraden, wie mit der der endlichen [geschlossenen] Geraden.

Die logische Möglichkeit des Riemannschen Systems kann man aus der konkreten Deutung entnehmen, die sie mittels der Geometrie des Geradenbündels erhält.

Die Eigenschaften des Geradenbündels werden leicht in die der Riemannschen Ebene übersetzt und umgekehrt mit Hilfe des folgenden Wörterbuchs:

Bündel	Ebene
Gerade	Punkt
Ebene (Büschel)	Gerade
Winkel zweier Geraden	Strecke
Keilwinkel	Winkel
Dreiflach	Dreieck
. . . .	. . . .

Wir geben hier als Beispiel die Übersetzung einiger der bekanntesten Sätze vom Bündel:

a) Die Summe der drei Keilwinkel eines Dreiflachs ist größer als zwei rechte Keilwinkel.	a) Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist größer als zwei rechte Winkel.
b) Alle Ebenen senkrecht zu einer anderen Ebene gehen durch eine Gerade.	b) Alle Geraden senkrecht zu einer anderen Geraden gehen durch einen Punkt.
c) Läßt man jeder Ebene des Bündels die Gerade entsprechen, in der die zur gegebenen Ebene senkrechten Ebenen sich schnei-	c) Läßt man jeder Geraden der Ebene den Punkt entsprechen, in der die zur gegebenen Geraden senkrechten Geraden sich schnei-

den, so erhält man eine Zuordnung zwischen Ebenen und Geraden, die folgende Eigenschaft besitzt: die den Ebenen eines Büschels entsprechenden Geraden gehören einer Ebene an, die ihrerseits zur entsprechenden Geraden die Achse des Büschels hat.

Die so bestimmte Zuordnung erhält den Namen absolute [orthogonale] Polarität des Bündels.

den, so erhält man eine Zuordnung zwischen Geraden und Punkten, die folgende Eigenschaft besitzt: die den Geraden eines Büschels entsprechenden Punkte gehören einer Geraden an, die ihrerseits zum entsprechenden Punkt das Zentrum des Büschels hat.

Die so bestimmte Zuordnung erhält den Namen absolute Polarität der Ebene.

§ 72. Eine wichtige Bemerkung über die Hyp. d. stumpfen W. hat neuerdings Dehn gemacht. Mit Bezugnahme auf die Schlußfolgerungen von Saccheri [S. 32], Lambert [S. 47], Legendre [S. 59] bemerkt man leicht, daß diese Autoren beim Beweis der Falschheit der Hyp. d. stumpfen W. sich nicht nur der Hypothese der unendlichen Geraden, sondern auch der archimedischen Hypothese bedienten. Wir können uns jetzt fragen, ob diese letztere wirklich notwendig ist, um das Ergebnis festzustellen. In anderen Worten, wir können uns fragen, ob, wenn man das archimedische Postulat ausschließt, die beiden Hypothesen, von denen die eine den Geraden der Charakter der offenen Linien zuerteilt, und die andere der Winkelsumme im Dreieck einen größeren Wert als 180^0, miteinander verträglich sind. Auf diese Frage antwortet Dehn in der S. 32 Anm. 1 genannten Arbeit durch Konstruktion einer nichtarchimedischen Geometrie, wo die Gerade offen ist und die Dreiecke die zweite Saccherische Hypothese erfüllen. Also ist die zweite

der drei Hypothesen von Saccheri verträglich mit der Hypothese der offenen Geraden im Sinn eines nicht-archimedischen Systems. Die neue Geometrie wurde von Dehn „Nicht-Legendresche Geometrie" gegenannt. [Vgl. oben § 59, S. 127.]

§ 73. Obwohl, wie wir schon gesagt haben, die Geometrie einer Oberfläche konstanter [positiver oder negativer] Krümmung im allgemeinen nicht die ganze nichteuklidische Geometrie der Ebene von Lobatschefskij und von Riemann widerspiegelt, so kann man sich fragen, ob ein solches Entsprechen stattfinden kann für irgendeine besondere Oberfläche.

Diese Frage beantwortet sich so:

1. Es gibt keine reguläre[1]) analytische Oberfläche, auf der in ihrer vollen Ausdehnung die Bolyai-Lobatschefskijsche Geometrie gilt [Lehrsatz von Hilbert[2])].

---

1) D. h. frei von Singularitäten.

2) „Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung." Transactions of the American Math. Society, t. II, p. 86—99 [1901]; „Grundlagen der Geometrie", 2. Aufl., p. 162—175 [Leipzig, Teubner, 1903].

Die durch Hilberts Lehrsatz gelöste Frage wurde von den Geometern infolge von Beltramis Deutung der Lobatschefskij-Bolyaischen Geometrie aufgeworfen. — Helmholtz hatte 1870 in seinem Vortrag: „Über Ursprung und Bedeutung der geometrischen Axiome." (Vorträge und Reden, Bd. II, S. 11 (Braunschweig 1884) die Unmöglichkeit behauptet, eine in allen Richtungen unendlich ausgedehnte pseudo-sphärische Oberfläche zu konstruieren, und A. Genocchi deckt in seiner „*Lettre à Mr. Quetelet sur diverses questions mathématiques*" [Belgique Bull. (2), t. XXXVI, p. 181—198, 1873] und ausführlicher in der Schrift: „*Sur une Mémoire de D. Foncenex et sur les géométries non-euclidiennes*" [Torino, Memorie (3), t. XXIX, S. 365—404, 1877] zuerst die Unvollständigkeit gewisser der Anschauung entnommenen Erwägungen auf, die den Beweis für die konkrete Existenz einer für die Darstellung der ganzen nichteuklidischen Ebene geeigneten Fläche zu erbringen zielten, und betont die

2. **Eine Fläche, auf der in ihrer ganzen Ausdehnung die Geometrie der Riemannschen Ebene gelten würde, müßte notwendig geschlossen sein.**

Die einzige reguläre analytische geschlossene Fläche konstanter positiver Krümmung ist die Kugel [Lehrsatz von Liebmann[1])]. Aber auf der Kugel, in deren Normalregionen die Riemannsche Geometrie gilt, treffen sich zwei Gerade immer in zwei [gegenüberliegenden] Punkten. Wir schließen deshalb:

Im gewöhnlichen Raum gibt es keine Flächen, die in voller Ausdehnung alle Eigenschaften der nichteuklidischen Ebenen verwirklichen.

§ 74. An diese Stelle gehört die Bemerkung, daß die Kugel allein unter allen Flächen konstanter, von Null verschiedener Krümmung mit einer Eigenschaft behaftet ist, die sie mehr als die anderen in die Nachbarschaft der Ebene bringt. In der Tat kann die Kugel

---

Wahrscheinlichkeit der Existenz singulärer Punkte [wie z. B. die auf der Rückkehrkante von Fig. 52 gelegenen] bei jedem bestimmten Modell von Oberflächen konstanter negativer Krümmung.

Über den Lehrsatz von Hilbert fügen wir noch hinzu, daß der vom Verfasser festgesetzte analytische Charakter der Oberfläche für Flächen positiver Krümmung als überflüssig erwiesen wurde. Man sehe hierüber die Dissertation von G. Lütkemeyer: „Über den analytischen Charakter der Integrale von partiellen Differentialgleichungen" [Göttingen 1902] und die Note von E. Holmgren: „*Sur les surfaces à courbure constante negative*". Comptes Rendus 1 Sem., 1902, p. 840—43.

1) „Eine neue Eigenschaft der Kugel." Gött. Nachrichten 1899, S. 44—54. — Auf S. 172—175 der „Grundlagen der Geometrie" von Hilbert wird diese Eigenschaft ebenfalls bewiesen. Wir bemerken, daß die Flächen konstanter positiver Krümmung notwendig analytisch sind. Man lese darüber nach in der genannten Dissertation von Lütkemeyer [S. 163] und in der Abhandlung von Holmgren: „Über eine Klasse von partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung", Math. Ann., Bd. 57, S. 407—20 [1903].

auf sich selbst hin bewegt werden in derselben Weise wie die Ebene, so daß die Eigenschaften der Kongruenz nicht nur für Normalregionen gelten, sondern wie bei der Ebene für die ganze mit einem Blick umfaßte Kugeloberfläche.

Diese Tatsache bringt uns auf eine Ausdrucksform für die Postulate der Geometrie, wobei a priori die Möglichkeit der Existenz einer Ebene mit allen charakteristischen Eigenschaften der Kugel einschließlich der einander gegenüberliegenden Punkte nicht ausgeschlossen wird. Man könnte in der Tat fordern, daß auf der Ebene gelten:

1. die Postulate b), c) [vgl. § 70] in jeder Normalregion;
2. die Postulate der Kongruenz für die ganze Ebene.

Man würde dann die geometrischen Systeme von Euklid, von Lobatschefskij-Bolyai und von Riemann finden [elliptischer Typus], die uns oben begegnet sind, wo zwei Gerade nur einen gemeinsamen Punkt haben; und ein zweites Riemannsches System [sphärischer Typus], wo zwei Gerade im allgemeinen immer zwei Punkte gemein haben.

§ 75. Wie Riemann sich seine vollständige Ebene vorgestellt hat, d. h., ob er sie sich als elliptische Ebene oder Kugelebene gedacht hat, oder ob er beide Möglichkeiten erkannt hat, kann man nicht feststellen, weil er in seiner Abhandlung Differentialgeometrie treibt und nur wenige Worte den vollständigen Formen widmet. Weiter haben die Nachfolger seiner Richtung, unter ihnen Beltrami, beständig die Riemannsche Geometrie in Beziehung auf die Kugel betrachtet und werden daher zu der Annahme veranlaßt, daß auf der vollständigen Riemannschen Ebene wie auf der Kugel [wegen der Existenz gegenüberliegender Punkte] das

Postulat der Bestimmung der Geraden Ausnahmen erlitte[1]) und daß die einzige mit der Hyp. d. stumpfen Winkels verträgliche Form die Kugelebene ist.

Die wesentlichen Eigenschaften der elliptischen Ebene wurden im Jahre 1859 von A. Cayley [1821—1895] gegeben, aber die Beziehung zwischen diesen Eigenschaften und der nichteuklidischen Geometrie wurde von Klein erst 1871 hinzugefügt. Klein verdankt man auch die klare Unterscheidung zwischen den beiden Riemannschen Geometrien und die Darstellung der elliptischen als Geometrie des Strahlbündels [vgl. § 71].

Um einzusehen, worin der Unterschied zwischen der sphärischen Geometrie und der elliptischen besteht, lenken wir die Aufmerksamkeit auf zwei Typen von Oberflächen, die im gewöhnlichen Raum auftreten, nämlich auf die Flächen mit zwei Seiten [zweiseitige] und auf die mit einer einzigen Seite [einseitige].

Beispiele von zweiseitigen Flächen sind die gewöhnliche Ebene, die Oberflächen zweiter Ordnung [konische, zylindrische, sphärische] und im allgemeinen alle die, welche Körper einschließen. Auf ihnen kann man zwei Seiten unterscheiden.

Ein Beispiel einer einseitigen Fläche ist uns durch das Möbiussche Blatt gegeben, das man leicht so konstruiert. Wir schneiden einen rechtwinkligen Streifen *ABCD* aus; statt aber die gegenüberliegenden Seiten *AB*, *CD* so zu verbinden, daß man eine zylindrische Fläche erhält, verbinden wir dieselben Seiten, nachdem

---

1) Vgl. z. B. die kurze Bemerkung über die Geometrie der Räume von konstanter positiver Krümmung, mit der Beltrami seine Abhandlung „*Teoria fondamentale degli spazî di curvatura costante*" [Annali di Matem. (2), t. II, p. 232—55, 1868] schließt. Diese Abhandlung, auf die wir in der Folge zurückkommen müssen, wurde von Hoüel ins Französische übersetzt. T. VI, p. 347—77, der Annales scient. de l'École Normale supérieure.

eine von ihnen, z. B. *CD*, sich um ihren Mittelpunkt um 180° gedreht hat. Dann wird das, was die obere Fläche des Rechtecks war, in der Nähe von *CD* fortgesetzt auf der unteren Seite des ursprünglichen Rechtecks, so daß auf dem Möbiusschen Blatt die Unterscheidung von innen und außen unmöglich wird.

Will man die einseitigen Flächen von den zweiseitigen unterscheiden mittels einer Eigentümlichkeit, die nur von inneren Eigenschaften der Fläche abhängt, so verfahre man folgendermaßen. Man nehme einen Punkt auf der Fläche fest an und einen Drehungssinn um ihn, dann lasse man den Punkt einen geschlossenen Weg durchlaufen auf der Fläche, der einen etwa vorkommenden Rand nicht überschreitet: bei den zweiseitigen Flächen wird, wenn der Punkt in die Anfangslage zurückkommt, der anfängliche Sinn der Drehung mit dem endgültigen übereinstimmen; für die einseitigen Flächen [wie man leicht auf dem Möbiusschen Blatt bestätigt, indem man die mittlere Linie der Fläche durchläuft] gibt es geschlossene Wege, für die der Sinn der Drehung am Ende dem anfänglichen entgegengesetzt ist.


Möbiusssches Blatt.
Fig. 55.

Kehrt man zu den beiden Ebenen von Riemann zurück, so kann man jetzt leicht erklären, worin ihr wesentlicher Unterschied besteht: Die Kugelebene hat die Eigenschaften der zweiseitigen Flächen, die elliptische Ebene die der einseitigen Flächen.

Die hier ausgesprochene Eigenschaft der elliptischen Ebene findet sodann wie alle anderen eine konkrete Deutung im Geradenbündel.

In der Tat vertauscht ein Umklappen einer Geraden in sich, um den Stützpunkt des Bündels, die beiden Drehungen miteinander, die diese Gerade zur Achse haben.

Eine andere mit der vorigen verknüpfte Eigenschaft der elliptischen Ebene ist folgende: Die elliptische Ebene wird im Gegensatz zu dem, was bei der euklidischen und den anderen nichteuklidischen eintritt, durch ihre Geraden nicht in zwei Blätter zerlegt. Man kann sich auch in der Weise ausdrücken, indem man sagt: sind auf ihr zwei Punkte A, A' und eine beliebige Gerade gegeben, so kann man vom Punkte A zum Punkte A' gelangen durch einen Weg, der die Ebene nicht verläßt und die Gerade nicht schneidet.[1])

Diese Tatsache wird in eine deutliche Eigenschaft des Bündels übersetzt, die in Erinnerung zu bringen überflüssig ist.

§ 76. Ähnlich der Deutung der elliptischen Ebene ist die, welche sich von der Kugelebene geben läßt, mittels des Strahlen- [Halbgeraden-] Bündels. Die Übersetzung der Eigenschaften dieser Ebene in die Eigenschaften der Strahlen wird mit Anwendung eines Wörterbuches hergestellt, das dem in § 71 ähnlich ist, wobei das Wort Punkt dem Wort Strahl gegenübersteht.

Die Betrachtung des Strahlenbündels neben dem Geradenbündel bewährt sich sehr gut bei Erklärung der Beziehungen und der Unterschiede, welche zwischen den beiden Riemannschen Geometrien bestehen.

Wir können zwei Bündel betrachten, ein Geraden- und ein Strahlenbündel mit demselben Stützpunkt. Es ist klar, daß jeder Geraden des einen zwei Strahlen des zweiten entsprechen, daß jede Figur des ersten aus zwei symmetrischen des zweiten besteht, und daß unter gewissen Einschränkungen die metrischen Eigen-

---

1) Eine Fläche, die genau die Zusammenhangsverhältnisse der elliptischen Ebene besitzt, hat W. Boy konstruiert (Gött. Berichte 1900, S. 20—23. Math. Annalen 57 (1903), S. 151—84.

schaften der beiden Formen dieselben sind. Kommt man also überein, die beiden entgegengesetzten Strahlen des Strahlbündels als ein einziges Element bildend zu betrachten, so fällt das Strahlenbündel mit dem Geradenbündel zusammen.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auf die beiden Riemannschen Ebenen anwenden. Jedem Punkt der elliptischen Ebene entsprechen zwei getrennte gegenüberliegende der Kugelebene, zwei Geraden der ersten, die durch diesen Punkt gehen, zwei Gerade der zweiten, die zwei Punkte gemein haben usw.

Die elliptische Ebene muß also neben der Kugelebene als Doppelebene aufgefaßt werden.

Hinsichtlich der elliptischen Ebene und der Kugelebene ist zu bemerken, daß die in § 56 angegebenen Formeln der absoluten Trigonometrie sich darauf in jedem geeignet begrenzten Gebiet anwenden lassen. Das folgt aus der schon in § 58 erwähnten Tatsache, daß die Formeln der absoluten Geometrie auf der Kugel gelten, deren Geometrie, was die Normalregion betrifft, mit der der beiden genannten Ebenen übereinstimmt.

Grundzüge einer Raumgeometrie nach Riemann.

§ 77. Wir wenden uns jetzt dem Raum zu und gehen von der philosophischen Grundlage aus, daß auch, wenn man den Postulaten nach Voraussetzung wirkliche Bedeutung zuerkennt, sie Wahrheiten der Erfahrung ausdrücken, die nur in einem beschränkten Gebiet bestätigt werden können, und wir setzen voraus, daß auf Grundlage der genannten Postulate die Raumpunkte durch drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 dargestellt sind.

Bei dieser [analytischen] Darstellung werden jeder Linie drei Gleichungen entsprechen mit Parameter:

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad x_3 = f_3(t),$$

und wir können uns jetzt vornehmen, eine Funktion s des Parameters t zu bestimmen, die die Länge eines Kurvenbogens ausdrückt.

Auf Grund der distributiven Eigenschaft, wonach die Länge eines Bogens gleich der Summe der Längen der Teile ist, in die man ihn sich zerlegt denken kann, wird eine solche Funktion vollständig bestimmt, wenn man das Abstandselement zweier unendlich benachbarter Punkte kennt, mit den Koordinaten

$$x_1,\ x_2,\ x_3,$$
$$x_1 + dx_1,\quad x_2 + dx_2,\quad x_3 + dx_3.$$

Riemann geht von sehr allgemeinen Annahmen aus, die in der einfachsten Weise erfüllt sind, wenn man als Ausdruck für das Quadrat des Abstandselements [ds^2] eine in den Differentialen der Veränderlichen quadratische, beständig positive Form annimmt:

$$ds^2 = \sum a_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

wo die a_{ij} Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind.

Aus der Annahme des Grundsatzes, daß die Figuren sich übereinanderschieben lassen, beweist man, daß die Funktionen a_{ij} von solcher Beschaffenheit sind, daß man infolge geeigneter Abänderung des Koordinatensystems erreichen kann, daß ds^2 die Form annimmt:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{1 + \frac{K}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)},$$

wobei die Konstante K das ist, was Riemann mit Erweiterung des Gaußschen Begriffs passend als Krümmung des Raumes bezeichnet.

Je nachdem K größer, gleich oder kleiner als Null ist, haben wir den Raum von konstanter positiver Krümmung, den Raum von der Krümmung Null und den Raum von konstanter negativer Krümmung.

Gehen wir einen Schritt weiter und dehnen das Prinzip, daß die Figuren sich übereinander schieben lassen [Prinzip der Beweglichkeit], auf den ganzen Raum aus und ebenso das Postulat, wonach die Gerade ausnahmslos durch zwei Punkte bestimmt ist: man findet dann drei Raumformen, d. h. drei logisch mögliche und mit unseren Ausgangspunkten verträgliche Geometrien.

Die erste dieser Geometrien, die der positiven Krümmung entspricht, ist durch die Tatsache charakterisiert, daß in jeder Ebene das Riemannsche System gilt, weshalb der Raum positiver Krümmung in allen Richtungen endlich ist; die zweite, der Krümmung Null entsprechende, ist die gewöhnliche euklidische; die dritte endlich, die dem negativen Wert der Krümmung entspricht, ergibt in jeder Ebene das Lobatschefskij-Bolyaische System.

Das Werk von H. Helmholtz und die Untersuchungen von S. Lie.

§ 78. Auch Hermann v. Helmholtz [1821—1894] hat in einigen seiner Schriften mathematischen und philosophischen Inhalts[1]) die Frage nach den Grund-

1) „Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie"; Heidelberg, Verhandl. d. naturw.-med. Vereins, Bd. IV, S. 197—202 [1868]; Bd. V, S. 31—32 [1869]. — Wissenschaftliche Abhandlungen von H. Helmholtz, Bd. II, S. 610—17. [Leipzig 1883.] Sie wurde von J. Hoüel ins Französische übersetzt und in den Mémoires de la Société des Sciences Phys. et Nat. de Bordeaux [t. V, 1868] veröffentlicht und auch zusammen mit den *„Études géométriques"* von Lobatschefskij und der *„Correspondance de Gauß et de Schumacher"* [Paris, Hermann, 1895].

„Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen"; Gött. Nachr., t. XV, S. 193—221 [1868]. — Wissenschaftliche Abhandlungen von Helmholtz, Bd. II, S. 618—39.

lagen der Geometrie behandelt. Statt von vornherein die Form anzunehmen:

$$ds^2 = \sum a_{ij} dx_i dx_j,$$

für den Ausdruck des Abstandselements, hat er gezeigt, daß dieser Ausdruck in der von Riemann ihm für die Räume konstanter Krümmung gegebenen Form die einzig mögliche ist, wenn man den Riemannschen Hypothesen von Anfang an die über die Beweglichkeit der Figuren hinzufügt in einer Weise, die der Bewegung starrer Körper entspricht. Das Riemann-Helmholtzsche Problem ist einer gründlichen Kritik unterworfen worden von S. Lie [1842—1899]. Er ging von der grundlegenden, von Klein in den Untersuchungen von Helmholtz erkannten Idee aus, daß die Kongruenz zweier Figuren die Möglichkeit bedeutet, daß sie sich ineinander mittels einer bestimmten Punkttransformation des Raumes überführen lassen, und daß die Eigenschaften, für die die Kongruenz den logischen Charakter der Gleichheit fordert, mit der Tatsache verknüpft sind, daß die Bewegungen eine Gruppe von Transformationen bilden.[1])

„*The Axioms of Geometry*"; The Academy, t. I, p. 123—81 [1870]. — Revue des cours scientifiques, t. VII, S. 498—501 [1870].

„Über die Axiome der Geometrie"; Populäre wissenschaftliche Vorträge, 3. Heft, S. 21—54. [Braunschweig 1876.] — Engl. Übersetzung: Mind, t. I, p. 301—21. — Franz. Übersetzung: Revue scient. de la France et de l'Étranger (2), t. XII, p. 1197—1207 [1877].

„Über den Ursprung, Sinn und Bedeutung der geomtrischen Sätze"; Wissenschaftliche Abhandlungen von H. Helmholtz, Bd. II, S. 640—60. — Engl. Übersetzung: Mind, t. II, S. 212—24 [1878].

1) Vgl. Klein: „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen". [Erlangen, 1872.] —

Deswegen wurde das Riemann-Helmholtzsche Problem von Lie in folgende Form gebracht:

Die kontinuierlichen Raumgruppen zu bestimmen, die in einem begrenzten Gebiet die Eigenschaft der Bewegungen haben.

Nachdem in geeigneter Form diese Eigenschaften gefordert sind, die sich auf die freie Beweglichkeit der Linienelemente und Flächenelemente durch einen Punkt beziehen, findet man drei Typen von Gruppen, welche die drei Geometrien von Euklid, Lobatschefskij-Bolyai und Riemann charakterisieren.[1])

Projektive Richtung.

Unterordnung der metrischen Geometrie unter die projektive.

§ 79. Endlich steht auch die projektive Geometrie in einer eleganten Beziehung zu den drei geometrischen Systemen von Euklid, Lobatschefskij-Bolyai und Riemann.

Um auch von dieser letzteren Behandlungsart des Problems eine Vorstellung zu geben, erinnern wir daran, daß die projektive Geometrie nach dem System von G. C. Staudt [1798—1867] ausschließlich auf graphi-

---

Neudruck in den Math. Annalen 43, S. 63—100, Leipzig 1893. Ins Italienische übersetzt von G. Fano, Annali di Mat. (2), t. XVII, S. 301—43 [1899].

1) Vgl. Lie: „Theorie der Transformationsgruppen“, T. III, S. 437—543. [Leipzig, Teubner 1893.] — Im selben Gedankengang hat H. Poincaré in seiner Schrift: *„Sur les hypothèses fondamentaux de la Géométrie“* [Bull. de la Société Math. de France, t. XV, S. 203—16, 1887] das Problem gelöst, alle Hypothesen anzugeben, die unter den verschiedenen Transformationsgruppen die Fundamentalgruppe der ebenen euklidischen Geometrie auszeichnen.

schen Begriffen über die Beziehung zwischen den Punkten, Geraden und Ebenen beruht und systematisch alle Vorstellung von Kongruenz und Bewegung [also von Maß usw.] verbannt. Demnach wird die projektive Geometrie, abgesehen von einer bestimmten Gruppe von Postulaten, eine beschränktere Zahl von allgemeinen Eigenschaften enthalten, die, was die ebenen Figuren betrifft, die [projektiven] Eigenschaften sind, die bei Projizieren und Schneiden ungeändert bleiben.

Nichtsdestoweniger kann man, nachdem im Raum die projektive Geometrie eingeführt ist, in ihren Organismus die metrischen Begriffe einführen als Beziehungen der Figuren zu bestimmten [metrischen] Grundgebilden.

Indem wir uns auf den Fall der euklidischen Ebene beschränken, wollen wir zusehen, welcher graphischen Interpretation die metrischen Fundamentalbegriffe Parallelismus und Orthogonalität fähig sind.

Wir wollen zu diesem Zweck in besonderer Weise die unendlichferne Gerade der Ebene betrachten und die absolute Involution, die auf ihr die orthogonalen Strahlen eines Büschels bestimmen. Die imaginär konjugierten Doppelpunkte dieser Involution werden Kreispunkte genannt wegen ihrer Eigenschaft, allen Kreisen der Ebene anzugehören [Poncelet, 1822 [1]].

Dies festgesetzt, drückt sich der Parallelismus von zwei Geraden aus durch die Eigenschaft, die sie haben, in einem Punkt der unendlich fernen Geraden zusammentreffen; die Orthogonalität von zwei Geraden drückt sich aus durch die Eigenschaft der unendlich fernen Punkte, daß sie in der absoluten Involution konjugiert sind, d. h.,

---

1) „*Traité des propriétés projectives des figures*", 2. Aufl., t. I, nº 94, p. 48 [Paris, G. Villars, 1865].



daß sie die Kreispunkte harmonisch trennen. [Chasles, 1850[1])].

Andere metrische Eigenschaften, die graphisch ausgedrückt werden können, sind die mit den Winkelgrößen zusammenhängenden, insofern als jede Beziehung:

$$F(A, B, C \ldots) = 0$$

zwischen den Winkeln $A, B, C \ldots$ durch die andere Beziehung

$$F\left(\frac{\log a}{2i}, \frac{\log b}{2i}, \frac{\log c}{2i} \ldots\right) = 0$$

ersetzt werden kann, wo $a, b, c \ldots$ die Doppelverhältnisse sind, die von den Schenkeln der Winkel mit den [imaginären] die Scheitel der Winkel mit den Kreispunkten verbindenden Geraden gebildet werden [Laguerre, 1853[2])].

Allgemeiner beweist man, daß die Kongruenz zwischen zwei beliebigen ebenen Figuren durch eine Lagebeziehung zwischen ihr, der unendlich fernen Geraden und der absoluten Involution ausgedrückt werden kann[3]), und da die Kongruenz die Grundlage aller metrischen Eigenschaften ist, so folgt, daß die unendlich ferne Gerade und die absolute Involution es gestatten, der projektiven Geometrie alle Eigenschaften der metrischen euklidischen Geometrie unterzuordnen. Die metrischen Eigenschaften erscheinen also in der projektiven Geometrie nicht als graphische Eigen-

---

1) „*Traité de Géométrie supérieure*“, 2. Aufl., n° 660, p. 425. [Paris, G. Villars, 1880.]

2) „*Sur la théorie des foyers.*“ Nouv. Ann., t. XII, p. 57. Oeuvres de Laguerre, t. II, p. 12—13. [Paris, G. Villars, 1902.]

3) Siehe z. B. die „*Lezioni di Geometria proiettiva*“ von F. Enriques, p. 177—88. [Bologna, Zanichelli, 2. Aufl. 1904.] — Die erste Auflage ist ins Deutsche übersetzt von H. Fleischer. [Leipzig, Teubner, 1903.]

schaften der für sich betrachteten Figuren, sondern als graphische Beziehungen in Hinsicht auf die metrischen Fundamentalgebilde, die aus der unendlich fernen Geraden und der absoluten Involution bestehen.

Die Gesamtheit der metrischen Fundamentalgebilde bezeichnet man kurz als das Absolute der Ebene [Cayley].

Was wir über die Ebene gesagt haben, ist natürlich auf den Raum auszudehnen. Im Raum sind die metrischen Fundamentalgebilde, welche es gestatten, die metrischen Eigenschaften den graphischen unterzuordnen, die unendlich ferne Ebene und eine gewisse Polarität [absolute Polarität] auf dieser Ebene, die durch die Polarität des Bündels bestimmt werden, welche jeder Geraden die zu ihr senkrechte Ebene zuordnet [vgl. § 71]. Der Fundamentalkegelschnitt der genannten Polarität ist imaginär, weil im Büschel keine reellen Geraden existieren, die in die entsprechende senkrechte Ebene fallen. Man sieht dann leicht, daß er alle Paare von Kreispunkten enthält, die den verschiedenen Ebenen des Raumes angehören, und daß er sich also als Schnitt aller Kugeln herausstellt. Daher die Benennung Kugelkreis für dieses metrische Fundamentalgebilde im Raum.

§ 80. Jetzt ergeben sich von selbst die beiden folgenden Fragen:

1. Ist bei den nichteuklidischen Hypothesen die Begründung der projektiven Geometrie möglich?

2. Die Möglichkeit dieser Begründung vorausgesetzt, können jetzt die metrischen Eigenschaften, wie im euklidischen Fall, den projektiven untergeordnet werden?

Die Antwort ist für beide bejahend. Wenn im

Raum das Riemannsche System gilt, so macht die Begründung der projektiven Geometrie keine Schwierigkeit wegen der Tatsache, daß ohne weiteres die graphischen Eigenschaften gelten, die nach Einführung der uneigentlichen Gebilde als Grundlagen der gewöhnlichen projektiven Geometrie dienen.

Wenn im Raume das Lobatschefskij-Bolyaische System gilt, kann man auch noch die projektive Geometrie begründen, indem man mit geeigneter Übereinkunft uneigentliche oder ideale Punkte, Gerade und Ebenen einführt, durch dasselbe Merkmal, das man im euklidischen Fall befolgt bei Ergänzung des Raumes durch die unendlich fernen Elemente. Es würde hierfür genügen, neben dem eigentlichen Bündel [der Gesamtheit aller durch einen Punkt gehenden Geraden] zwei uneigentliche Bündel zu betrachten, von denen der eine aus allen einer gegebenen Geraden in einem und demselben Sinn parallelen Geraden besteht und der andere aus allen Loten zu einer gegebenen Ebene, und uneigentliche Punkte einzuführen, die als Stützpunkte dieser Bündel zu betrachten sind.

Wenn auch den uneigentlichen Punkten, die einer Ebene angehören, in diesem Fall nicht wie im euklidischen eine Gerade zugeordnet werden kann [unendlich ferne Gerade], so bilden sie doch ein ganzes Gebiet, das von den wirklichen Punkten [eigentlichen Punkten] durch einen Kegelschnitt [Grenzkegelschnitt oder unendlich ferner Kegelschnitt] getrennt ist. Dieser Kegelschnitt ist der Ort der durch Büschel paralleler Geraden bestimmten uneigentlichen Punkte.

Im Raum sind sodann die uneigentlichen Punkte von den eigentlichen durch eine nicht geradlinige Fläche zweiten Grades [Grenzfläche oder unendlich ferne Fläche zweiten Grades] getrennt, den Ort der uneigentlichen Punkte, wo die parallelen

Geraden sich schneiden. Nachdem die Gültigkeit der projektiven Geometrie auch für die nichteuklidischen Hypothesen begründet ist [Klein[1])], so genügt es, um die Unterordnung der metrischen Geometrie unter die projektive zu erhalten, wenn man, wie im euklidischen Fall, die metrischen Fundamentalgebilde [das Absolute] betrachtet und die metrischen Eigenschaften der Figuren als Lagebeziehungen von ihnen in bezug auf diese Gebilde. Auf der Lobatschefskij-Bolyaischen Ebene ist das metrische Fundamentalgebilde der Grenzkegelschnitt, der das Gebiet der eigentlichen Punkte von dem der uneigentlichen Punkte trennt; auf der Riemannschen Ebene ist es ein durch die absolute Polarität definierter imaginärer Kegelschnitt [vgl. S. 153].

Sowohl im einen wie im andern Fall sind die metrischen Eigenschaften der Figuren alle graphischen, die bei projektiven Transformationen[2]), die das Absolute festhalten, ungeändert bleiben.

Diese projektiven Transformationen bestimmen dann die ∞^3 Bewegungen der nichteuklidischen Ebene.

Im euklidischen Fall sind die genannten Transformationen [die das Absolute nicht ändern] die ∞^4

---

1) Die Frage der Unabhängigkeit der projektiven Geometrie von der Parallelentheorie wird von Klein kurz berührt in seiner ersten Arbeit „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie". Math. Ann., Bd. IV, S. 573—625 [1871]. — Eine ausführlichere Entwicklung der Frage kann man nachlesen in der zweiten Arbeit von Klein über denselben Gegenstand. Math. Ann., Bd. VI, S. 112—45 [1873].

2) Es ist bekannt, daß unter projektiven Transformationen diejenigen verstanden werden, die jedem Punkt einen Punkt, jeder Geraden eine Gerade zuordnen, und einem Punkt und Gerade, die einander angehören, ebenfalls Punkt und Gerade, die einander angehören.

Ähnlichkeitstransformationen, unter denen sich im besondern die ∞^3 Bewegungen vorfinden.

Im Raum geschieht die Einordnung der Metrik in die projektive Geometrie mittels der Grenzfläche zweiten Grades [das absolute Gebilde des Raumes]. Wenn es reell ist, so erhält man die Geometrie von Bolyai-Lobatschefskij, wenn es imaginär ist, erhält man die Riemannsche von elliptischem Typus.

Die metrischen Eigenschaften der Figuren sind also die Lagebeziehungen des Raumes zu seinem absoluten Gebilde, d. h. die Lagebeziehungen, die bei allen projektiven Transformationen ungeändert bleiben, bei denen das absolute Raumgebilde festbleibt.

§ 81. Wie drücken sich i. b. auf das Absolute die Begriffe Abstand und Winkel aus?

Führt man in der projektiven Ebene irgend ein System von homogenen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) ein, welches die Geraden durch lineare homogene Gleichungen darzustellen gestattet, so wird die Gleichung des absoluten Kegelschnitts von der Form:

$$\Omega_{xx} = \sum a_{ij} x_i x_j = 0.$$

Dann wird der Abstand der beiden Punkte $X(x_1 x_2 x_3)$, $Y(y_1 y_2 y_3)$, abgesehen von einem konstanten Faktor, ausgedrückt durch den Logarithmus des Doppelverhältnisses der Gruppe, die sie zusammen mit den Punkten M, N bilden, in denen ihre Verbindungslinien das absolute Gebilde treffen.

Setzt man sodann:

$$\Omega_{xy} = \sum a_{ij} x_i y_j$$

und bedenkt man, daß nach der analytischen Geometrie das Doppelverhältnis der vier Punkte X, Y, M, N durch

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

gegeben ist, dann wird also der Ausdruck D_{xy} für den Abstand:

$$(1) \qquad D_{xy} = \frac{k}{2} \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}};$$

oder, wenn man die Umkehrungen der Kreisfunktionen und der hyperbolischen Funktionen einführt[1]):

$$(2) \qquad \begin{cases} D_{xy} = ik \text{ arc cos } \dfrac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} \\[2ex] D_{xy} = k \text{ Arc } Ch \dfrac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}, \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} D = ik \text{ arc sin } \dfrac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} \\[2ex] D = k \text{ Arc } Sh \dfrac{\sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}. \end{cases}$$

Die Konstante k, die in diesen Formeln erscheint, ist dann mit der Riemannschen Krümmung K durch die folgende Beziehung verbunden:

$$K = -\frac{1}{k^2}.$$

---

1) Die Beziehungen zwischen den Kreisfunktionen, den hyperbolischen Funktionen und der logarithmischen Funktion sind in folgenden Identitäten enthalten:

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\log a}{2i}\right) = \dfrac{a+1}{2\sqrt{a}} \\[2ex] \sin\left(\dfrac{\log a}{2i}\right) = \dfrac{1}{i}\,\dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} Ch\left(\dfrac{\log a}{2}\right) = \dfrac{a+1}{2\sqrt{a}} \\[2ex] Sh\left(\dfrac{\log a}{2}\right) = \dfrac{a-1}{2\sqrt{a}}. \end{cases}$$

Für die projektive Deutung des Winkelbegriffs gelten entsprechende Betrachtungen. Der Winkel von zwei Geraden ist proportional dem Logarithmus des Doppelverhältnisses der Gruppe, die sie mit den durch ihren Schnittpunkt gezogenen Tangenten an das absolute Gebilde ergeben.

Will man dann, daß die Maßzahl des Vollbüschels durch 2π gegeben ist, wie in der gewöhnlichen Metrik, so muß man als gemeinsamen Proportionalitätsfaktor $1 : 2i$ annehmen. Um dann analytisch den Winkel von zwei Geraden $u(u_1 u_2 u_3)$, $v(v_1 v_2 v_3)$ auszudrücken, setzen wir:

$$\Psi_{uu} = \sum b_{ij} u_i u_j .$$

Ist b_{ij} das algebraische Komplement des Elementes a_{ij} der Diskriminante von Ω_{xx}, so ist die Tangentengleichung des absoluten Gebildes gegeben durch

$$\Psi_{uu} = 0,$$

und der Winkel zweier Geraden durch die folgenden Formeln:

$$(1') \qquad \sphericalangle\, u, v = \frac{1}{2i} \log \frac{\Psi_{uv} + \sqrt{\Psi_{uv}^2 - \Psi_{uu}\Psi_{vv}}}{\Psi_{uv} - \sqrt{\Psi_{uv}^2 - \Psi_{uu}\Psi_{vv}}},$$

$$(2') \qquad \left| \begin{array}{l} \sphericalangle\, u, v = \text{arc cos} \dfrac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}} \\ \sphericalangle\, u, v = \dfrac{1}{i} \text{Arc } Ch \dfrac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}} \end{array} \right. ,$$

$$(3') \qquad \left| \begin{array}{l} \sphericalangle\, u, v = \text{arc sin} \dfrac{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv} - \Psi_{u,v}^2}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}} \\ \sphericalangle\, u, v = \dfrac{1}{i} \text{Arc } Sh \dfrac{\sqrt{\Psi_{u,v}^2 - \Psi_{uu}\Psi_{vv}}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}} \end{array} \right. .$$

Derselbe Ausdruck gilt für den Abstand von zwei Punkten

und den Winkel zweier Ebenen der Raumgeometrie, es würde die Annahme genügen, daß:

$$\Omega_{xx} = 0, \quad \Psi_{uu} = 0$$

die Gleichungen [für die Punkte und die Tangentialebenen] des absoluten Gebildes im Raum darstellten, wie zuvor in der Ebene. Je nachdem $\Omega_{xx} = 0$ die Gleichung einer reellen Fläche zweiten Grades mit elliptischen Punkten ist, oder die einer imaginären Fläche zweiten Grades, beziehen sich die Formeln auf die Lobatschefskij-Bolyaische oder auf die Riemannsche Geometrie.[1])

§ 82. Die vorhergehenden Formeln für den Winkel zweier Geraden oder zweier Ebenen enthalten als Spezialfall die der gewöhnlichen Metrik. In der Tat, betrachten wir der Einfachheit halber die Ebene und ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so ist die Tangentengleichung des absoluten Gebildes der euklidischen Geometrie [Kreispunkte, § 79]:

$$u_1^2 + u_2^2 = 0.$$

Setzt man in der Formel (2'):

$$\Psi_{uu} = u_1^2 + u_2^2, \quad \Psi_{vv} = v_1^2 + v_2^2, \quad \Psi_{uv} = u_1 u_2 + v_1 v_2,$$

so wird aus ihr:

$$\sphericalangle\, u, v = \text{arc cos} \frac{u_1 v_2 + v_1 u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

woraus:

$$\cos(u, v) = \frac{u_1 v_2 + v_1 u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Zieht man jetzt in Rechnung, daß die Richtungscosinus der Geraden $u(u_1 u_2 u_3)$ sind:

---

1) Vgl. hierzu die ausführlichen Entwicklungen in Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie II, 1, S. 461 ff. Leipzig 1891.



$$\cos(ux) = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \qquad \cos(uy) = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}},$$

so wird die letzte Beziehung

$$\cos(u, v) = \cos(ux)\cos(vx) + \cos(uy)\cos(vy)$$

d. i. der gewöhnliche Ausdruck, der den Winkel zweier Geraden in der euklidischen Ebene ergibt.

Für den Abstand zweier Punkte X, Y liegen die Verhältnisse nicht so einfach, wenn das absolute Gebilde in die Kreispunkte ausartet. In der Tat fallen die beiden Schnittpunkte M, N der Geraden XY mit dem absoluten Gebilde dann in dem einen unendlich fernen Punkt dieser Geraden zusammen, und die Formel (1) gibt beständig:

$$D_{xy} = \frac{k}{2}\log(M_\infty N_\infty XY) = \frac{k}{2}\log 1 = 0.$$

Immerhin erlaubt ein geeigneter Kunstgriff die gewöhnliche Formel für den Abstand als Grenzfall von (3) zu erhalten.

Um das Ziel leichter zu erreichen, nehmen wir an, daß die Gleichungen des [nicht ausgearteten] absoluten Gebildes in Punkt- und Linienkoordinaten auf die Form gebracht sind:

$$\Omega_{xx} = \epsilon x_1^2 + \epsilon x_2^2 + x_3^2 = 0,$$
$$\Psi_{uu} = u_1^2 + u_2^2 + \epsilon u_3^2 = 0.$$

Setzt man dann:

$$\Delta = \frac{\sqrt{\epsilon(x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 + (x_1 y_3 - y_1 x_3)^2 + (x_2 y_3 - y_3 x_2)^2}}{\sqrt{\epsilon x_1^2 + \epsilon x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{\epsilon y_1^2 + \epsilon y_2^2 + y_3^2}}$$

so gibt die Formel (3) des vorigen Paragraphen:

$$D_{xy} = ik \arcsin \sqrt{\epsilon}\,\Delta.$$

Sei ϵ unendlich klein, dann können wir, indem wir Größen von höherer Ordnung als der zweiten vernach-

lässigen, an Stelle des sinus den arcus setzen: Wählen wir dann k^2 unendlich groß, so zwar, daß das Produkt $ik\sqrt{\epsilon}$ endlich und der Einheit gleich bleibt für jeden Wert von ϵ, so wird die fragliche Formel:

$$D_{xy} = \frac{\sqrt{\epsilon(x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 + (x_1 y_3 - y_1 x_3)^2 + (x_2 y_3 - y_2 x_3)^2}}{\sqrt{\epsilon x_1^2 + \epsilon x_2^2 + x_3^2}\sqrt{\epsilon y_1^2 + \epsilon y_2^2 + y_3^2}}.$$

Gehen wir jetzt zur Grenze über für $\epsilon = 0$. Die Tangentengleichung des absoluten Gebildes wird:

$$u_1^2 + u_2^2 = 0;$$

und entsprechend artet der Kegelschnitt in zwei konjugiert imaginäre Punkte aus, die auf der Geraden $u_3 = 0$ liegen. Die Formel für den Abstand nimmt, wenn man die nichthomogenen Koordinaten:

$$X_i = \frac{x_i}{x_3}, \quad Y_i = \frac{y_i}{y_3}$$

einführt, die Form an:

$$D_{xy} = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2},$$

welche das Merkmal der euklidischen Geometrie ist. Damit ist unser Zweck erreicht.

Wir lenken die Aufmerksamkeit auf die Tatsache, daß wir, um aus der allgemeinen Formel für den Abstand die besondere im euklidischen Fall abzuleiten, k^2 ins Unendliche wachsen lassen mußten. Und da die Riemannsche Krümmung gegeben ist durch

$$-\frac{1}{k^2},$$

so erhält man auch auf diesem Weg eine Bestätigung des Ergebnisses, das dem euklidischen Raum die Riemannsche Krümmung Null zuweist.

§ 83. Die Eigenschaften der ebenen Figuren i. b. auf einen Kegelschnitt und die des Raumes i. b. auf

eine Fläche zweiten Grades ergeben zusammen die projektive Metrik. Die projektive Metrik wurde von Cayley [1]) untersucht, unabhängig von den Beziehungen, die sie mit den nichteuklidischen Geometrien hat, Beziehungen, die von F. Klein [2]) einige Jahre später entdeckt und erläutert wurden.

Klein verdankt man auch eine viel gebrauchte Bezeichnung für die projektive Metrik. Er nennt hyperbolische Geometrie die Cayleysche Geometrie bei einem reellen nicht ausgearteten absoluten Gebilde, elliptische Geometrie die bei einem imaginären nicht ausgearteten absoluten Gebilde, parabolische Geometrie den Grenzfall der beiden vorhergehenden. Wir können also in der Folge diese Benennung gebrauchen, um die drei geometrischen Systeme von Lobatschefskij-Bolyai, Riemann [elliptischer Typus] und Euklid zu bezeichnen.

Darstellung der Lobatschefskij-Bolyaischen Geometrie in der euklidischen Ebene.

§ 84. An die projektive Deutung der nichteuklidischen Maßbestimmungen, von der wir oben gesprochen haben, schließt sich eine interessante Darstellung, die man der hyperbolischen Geometrie auf der euklidischen Ebene geben kann. Um sie zu erhalten, nehmen wir auf der Ebene einen festen nicht ausgearteten Kegelschnitt an, z. B. einen Kreis, und in bezug auf diesen Kreis setzen wir folgende Definitionen fest:

---

1) Vgl.: „Sixth Memoir upon Quantics“, Philosophical Transactions, t. CXLIX, p. 61—90 [1859]; oder: Math. Papers of Cayley, t. II, p. 561—92.

2) Vgl.: „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“; Math. Ann., Bd. IV, S. 573—625 [1871].

Ebene = Gebiet der Punkte im Innern des Kreises.

Punkt = Punkt innerhalb des Kreises.

Gerade = Sehne des Kreises.

Man kann dann unmittelbar bestätigen, daß die Postulate über die Bestimmung der Geraden, über die Eigenschaften von Strecken und Winkeln sich durch Beziehungen ausdrücken, die immer gültig sind, auch wenn wir die vorgenannten Bezeichnungen annehmen.

Aber in der weiteren Entwicklung der Geometrie kommen die Postulate der Kongruenz hinzu, die im folgenden Prinzip der Bewegung enthalten sind.

Sind in der Ebene zwei Punkte A, A' gegeben und entsprechend durch sie die Geraden a, a', so gibt es vier Arten, die Ebene auf sich zu legen, wobei A und a entsprechend mit A' und a' zusammenfallen. Genauer gesagt: eine Art dieser Übereinanderlegung ist bestimmt, wenn wir als einander zugeordnet fest annehmen einen Halbstrahl von a und einen Halbstrahl von a', ferner das eine Ufer von a und das eine Ufer von a'. Von diesen vier Bewegungen sind zwei direkte Kongruenzen, die beiden anderen umgekehrte Kongruenzen.

Nehmen wir jetzt die vorhergehenden Deutungen der Gebilde Punkte, Gerade, Ebene, so ist die Übersetzung des hier ausgesprochenen Grundsatzes:

Ist in der Ebene ein Kegelschnitt gegeben [z. B. ein Kreis] und sind zwei innere Punkte A, A' und durch sie entsprechend die Sehnen a und a' fest angenommen, so gibt es vier projektive Transformationen der Ebene, die das Innengebiet des Kegelschnitts in sich selbst überführen und A, a entsprechend in A', a' überführen.

Um eine von ihnen fest zu bestimmen, genügt es

zu fordern, daß ein gegebenes Ende von a einem gegebenen Ende von a' entspricht und dem einen Ufer der durch a zerlegten Ebene ein bestimmtes Ufer i. b. auf a'. Von diesen vier Transformationen bestimmen zwei auf dem Kegelschnitt eine gleichsinnige, zwei eine ungleichsinnige projektive Zuordnung.

§ 85. Wir beweisen den Inhalt dieses Satzes, wobei wir der Einfachheit halber zwei nicht zusammenfallende Kegelschnitte τ und τ' nehmen, die beide in derselben Ebene liegen oder nicht.

Es seien M, N die Enden der Sehne a; M', N' die der Sehne a' und P, P' die Pole von a und a' für die beiden Kegelschnitte τ und τ'.

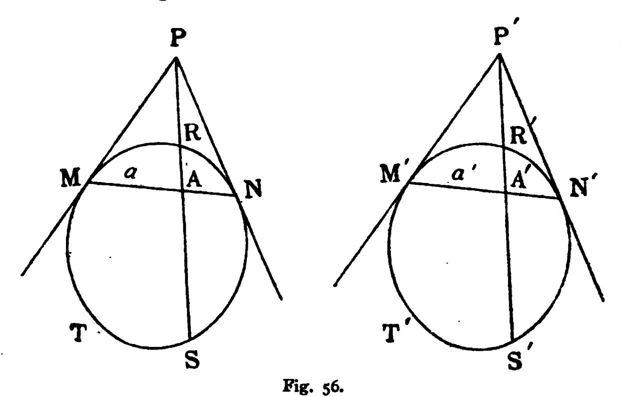


Fig. 56.

Dies festgesetzt, schneidet die Gerade PA den Kegelschnitt τ in zwei getrennten reellen Punkten RS und die Gerade $P'A'$ den Kegelschnitt τ' in den beiden reellen und getrennten Punkten R' und S'.

Eine projektive Transformation, die τ in τ' verwandelt, ferner die Gerade a in a' und den Punkt A in A', ordnet dem Punkt P den Punkt P' zu, und der Geraden PA die Gerade $P'A'$. Diese Transformation

bestimmt dann zwischen den Punkten der Kegelschnitte eine projektive Zuordnung, wobei dem Punktepaar M, N das Punktepaar $M'N'$ entspricht und dem Punktepaar R, S das Punktepaar R', S'.

Umgekehrt gehört eine projektive Zuordnung zwischen den beiden Kegelschnitten, die diese Eigenschaften besitzt, einer projektiven Transformation der beiden Ebenen an, wie sie oben beschrieben ist.[1])

Wenn wir aber die beiden Kegelschnitte τ, τ' betrachten, so sehen wir, daß den Punkten des Quadrupels $MNRS$ der Reihe nach die Punkte irgend eines der folgenden Quadrupel auf τ' zugeordnet werden können:

$$M'N'R'S'$$
$$N'M'S'R'$$
$$M'N'S'R'$$
$$N'M'R'S',$$

womit die Existenz der vier Projektivitäten bewiesen ist, von denen in dem ausgesprochenen Satz die Rede ist.

Nehmen wir jetzt an, daß die beiden Kegelschnitte zusammenfallen, so brauchen wir im vorigen Beweis nichts zu ändern. Wir fügen hinzu, daß von den vier genannten Projektivitäten eine und nur eine der Strecke AM die Strecke $A'M'$ zuordnet, wenn dabei die gestrichelten Teile in der Figur einander entsprechen.

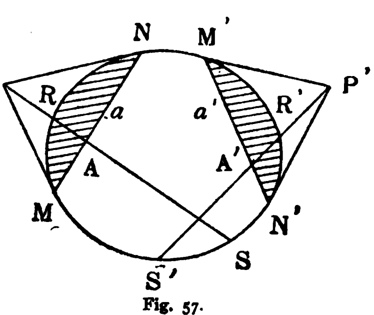


Fig. 57.

1) Über diesen Beweis und die ihm zugrunde liegenden Lehrsätze der projektiven Geometrie vgl. man z. B. die „*Lezioni di geometria proiettiva*" von F. Enriques, Kap. X, p. 251—53 (S. 229—33 der oben S. 166 genannten Übersetzung).

Übrigens bestimmen die beiden durch die Quadrupel:

$$\begin{pmatrix} MNRS \\ M'N'R'S' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} MNRS \\ N'M'S'R' \end{pmatrix}$$

definierten Projektivitäten auf dem Kegelschnitt gleichsinnige Projektivitäten, die anderen beiden durch die Quadrupel:

$$\begin{pmatrix} MNRS \\ M'N'S'R' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} MNRS \\ N'M'R'S' \end{pmatrix}$$

definierten bestimmen ungleichsinnige Projektivitäten.

§ 86. Dies festgesetzt, nehmen wir zum Zweck der Ergänzung die Definitionen des § 84 i. b. auf einen in der Ebene gegebenen Kreis wieder auf.

Ebene = Innengebiet des Kreises.

Punkt = Punkt im Innern des Kreises.

Gerade = Sehne des Kreises.

Bewegungen = Projektive Transformationen der Ebene, die das Innengebiet des Kreises in sich selbst überführen.

Umklappungen = Ungleichnamige Transformationen des Kreises.

Kongruente Figuren = Figuren, die ineinander mittels der genannten Projektivitäten überführbar sind.

Die vorigen Entwicklungen berechtigen ohne weiteres die Behauptung, daß alle Sätze der elementaren ebenen Geometrie, die mit den Begriffen Gerade, Winkel, Kongruenz verknüpft sind, in geeigneter Form übersetzt werden können in Eigenschaften der Beziehung des Systems der Punkte im Innern des Kreises, das wir mit $\{S\}$ bezeichnen werden. Sehen wir zu, was im be-

sonderen im System $\{S\}$ zwei zueinander senkrechten Geraden der gewöhnlichen Ebene entspricht.

Wir bemerken hierzu, daß, wenn r und s zwei aufeinander senkrechte Gerade sind, eine Umklappung der Ebene um s die Gerade r mit sich selbst zur Deckung bringt, aber die beiden Strahlen vertauscht, in die sie durch s geteilt sind.

Nach den angenommenen Definitionen ist eine Umklappung des Systems S eine Transformation, bei der eine Sehne s des Kreises als Achse fest bleibt und ebenso der Pol dieser Achse als Zentrum. Die festbleibenden Geraden bei dieser Transformation sind außer S alle Geraden, die durch das Zentrum gehen; demnach müssen im System $\{S\}$ zwei Gerade zueinander senkrecht genannt werden, wenn sie i. b. auf den Fundamentalkreis konjugiert sind.

Man könnte in $\{S\}$ leicht alle Sätze über zueinander senkrechte Gerade bestätigen; im besonderen, daß, wenn man vom gemeinsamen Punkt zweier konjugierten Sehnen in $\{S\}$ die [imaginär konjugierten] Tangenten an den Fundamentalkreis legt, diese Tangenten durch die senkrechten Geraden harmonisch getrennt werden. [Vgl. S. 166.][1])

§ 87. Wir wollen noch zusehen, wie in der gewöhnlichen Maßbestimmung [die für das Kreisinnere anzunehmen ist] der Abstand von zwei Punkten ausgedrückt werden kann.

Wir führen zu diesem Zweck ein System von rechtwinkligen Koordinaten (x, y) ein, mit dem Mittelpunkt des Kreises als Koordinatenanfang. Der Abstand von

1) M. Großmann hat diese Darstellung der nichteuklidischen Geometrie benützt, um eine Reihe von Aufgaben der nichteuklidischen Geometrie zu lösen. — Vgl. Anhang III.

zwei Punkten $A(x, y)$, $B(x', y')$ kann nicht durch die bekannte Quadratwurzel:

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

ausgedrückt werden, weil sie nicht invariant ist bei den oben als Bewegungen bezeichneten projektiven Transformationen; der Abstand wird eine Funktion ihrer Koordinaten sein, die invariant ist i. b. auf die vorgenannten Transformationen, und die außerdem auf der Geraden, die durch die Formel:

$$\text{Abst.}\,(AB) = \text{Abst.}\,(AC) + \text{Abst.}\,(CB)$$

ausgedrückte distributive Eigenschaft besitzt.

Nun ist das Doppelverhältnis der vier Punkte $ABMN$, wo MN die Endpunkte der Sehne AB sind, eine Funktion der Koordinaten (x, y), (x', y') von A und B, die bei allen projektiven Transformationen ungeändert bleibt, welche den begrenzenden Kreis festhalten: der allgemeinste Ausdruck, der die geforderte invariante Eigenschaft besitzt, ist eine willkürliche Funktion des Doppelverhältnisses.

Fordert man aber, daß die genannte Funktion im oben angegebenen Sinne distributiv ist, so muß man sie bis auf einen Proportionalitätsfaktor gleich dem Logarithmus von

$$(ABMN) = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$$

annehmen. Wir haben also:

$$\text{Abst.}\,(AB) = \frac{k}{2} \log (ABMN).$$

Ähnlich verfährt man, um den Winkel von zwei Geraden auszuwerten. In diesem Fall ist zu bemerken, daß, wenn man will, daß der rechte Winkel durch $\pi : 2$ ausgedrückt wird, notwendig als multiplikative Konstante

zum Logarithmus der Faktor $1 : 2i$ hinzugenommen werden muß. Wir haben dann:

$$\sphericalangle\, ab = \frac{1}{2i} \log (abmn),$$

wo mit m, n die imaginär konjugierten Tangenten bezeichnet sind, die durch den Scheitel des Winkels an den Kreis gezogen sind, und mit $(abmn)$ das Doppelverhältnis der vier Geraden a, b, m, n, das analytisch ausgedrückt wird durch:

$$\frac{\sin (am)}{\sin (bm)} : \frac{\sin (an)}{\sin (bn)}.$$

§ 88. Ein Verweis auf das oben (§ 81) über die Einordnung der metrischen Geometrie in die projektive Gesagte zeigt klar, daß die obigen Formeln für Abstand und Winkel mit denen zusammenfallen, die man in der nichteuklidischen Ebene erhalten würde, wenn das absolute Gebilde ein Kreis ist. Dies würde genügen für den Schluß, daß die Geometrie des Systems $\{S\}$ eine wirkliche Darstellung der Lobatschefskij-Bolyaischen Geometrie liefert. Wollen wir uns weiter ganz gründlich davon Rechenschaft geben, so suchen wir, wie in das System $\{S\}$ Definition und Eigenschaften der parallelen Geraden übersetzt werden.

Es seien $r\ (u_1 u_2 u_3)$ und $r'\ (v_1 v_2 v_3)$ zwei verschiedene Sehnen des Fundamentalkreises. Beziehen wir den Kreis auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt als Koordinatenanfang, und nehmen wir den Radius als Maßeinheit, so kommt:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$u^2 + v^2 - 1 = 0$$

als Punktgleichung und als Tangentengleichung des Kreises.

Machen wir die Gleichungen homogen, so erhalten wir:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$
$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0.$$

Der Winkel $\sphericalangle rr'$ der beiden Geraden kann jetzt mittels der Formeln (3') von § 81 berechnet werden, wenn man darin setzt:

$$\Psi_{uu} = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2,$$
$$\Psi_{vv} = v_1^2 + v_2^2 - v_3^2,$$
$$\Psi_{uv} = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3.$$

Wir erhalten z. B.:

$$\sin \sphericalangle r, r' = \frac{\sqrt{(u_1 v_2 - v_1 u_2)^2 - (u_2 v_3 - v_2 u_3)^2 - (u_3 v_1 - v_1 u_3)^2}}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)}}.$$

Beachtet man jetzt, daß die Geraden rr' bzw. die Gleichungen haben:

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0,$$
$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0,$$

und daß sie sich treffen im Punkt mit den Koordinaten:

$$x_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2,$$
$$x_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3,$$
$$x_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1,$$

so nimmt der obige Ausdruck für den Winkel $\sphericalangle rr'$ die Form an:

$$(4) \qquad \sin \sphericalangle r, r' = \frac{\sqrt{(x_3^2 - x_1^2 - x_2^2)}}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 - u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2)}}.$$

Hieraus sieht man, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Winkel Null wird, durch das Verschwinden des Zählers des erhaltenen Bruchs gegeben ist.

Aber damit dieser Zähler verschwindet, muß der Schnittpunkt $(x_1 x_2 x_3)$ der beiden Sehnen dem Kreisumfang des Fundamentalkreises angehören, und umgekehrt (Fig. 58); daher: In der gebräuchlichen Deutung der geometrischen Sätze mittels des Systems $\{S\}$ müssen wir zwei Sehnen parallel nennen, wenn sie sich in einem Punkt des Fundamentalkreises treffen, weil der Winkel dieser Sehnen Null ist.

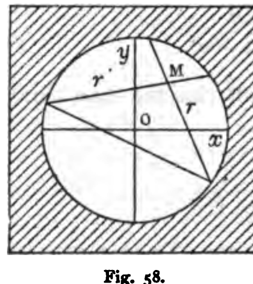


Fig. 58.

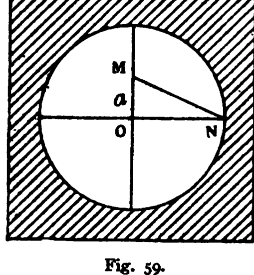


Fig. 59.

Und weil durch einen Punkt im Innern des Kreises zwei Sehnen gehen, die diesen Punkt mit den Enden einer andern beliebigen Sehne verbinden, wird im System $\{S\}$ der Fundamentalsatz der hyperbolischen Geometrie bestätigt.

§ 89. Um im System $\{S\}$ die Formel für den Parallelwinkel wiederzufinden, berechnen wir vor allem (Fig. 59) den Winkel OMN zwischen der y-Achse und der Geraden MN, die einen Punkt M von y mit dem Ende N der x-Achse verbindet. Bezeichnen wir mit a den gewöhnlichen Abstand der Punkte M und O, so sind die homogenen Koordinaten der Geraden MN und der Geraden OM entsprechend $(a, 1, -a)$, $(1, 0, 0)$, und die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Geraden sind

(0, a, 1). Dann gibt die Formel (4) des vorigen Paragraphen:

$$\sin \sphericalangle OMN = \sqrt{1 - a^2}.$$

Auf der andern Seite ist der gewöhnliche Abstand zwischen den beiden Punkten O und M nach § 81, 2 gegeben durch:

$$OM = k \text{ Arc } Ch \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}},$$

woraus:

$$Ch \frac{OM}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der für den sinus des Winkels OMN, so erhält man:

$$Ch \frac{OM}{k} = \frac{1}{\sin \sphericalangle OMN},$$

eine Beziehung, die mit der von Taurinus, Lobatschefskij und Bolyai für den Parallelwinkel gegebenen zusammenfällt. (Vgl. S. 93.)

§ 90. Sehen wir endlich zu, wie sich in $\{S\}$ der Abstand von zwei unendlich benachbarten Punkten ausdrückt [das Abstandselement], um die jetzige Darstellung der hyperbolischen Geometrie mit der von Beltrami in Einklang zu bringen. [Vgl. § 69.]

Seien (x, y), $(x + dx, y + dy)$ zwei unendlich benachbarte Punkte. Ihr Abstand wird mittels der Formel (2) des § 81 berechnet, wenn man darin setzt:

$$\Omega_{xx} = x^2 + y^2 - 1,$$
$$\Omega_{yy} = (x + dx)^2 + (y + dy)^2 - 1,$$
$$\Omega_{xy} = x(x + dx) + y(y + dy) - 1.$$

Setzt man dann für den Bogen den Sinus ein und

erhebt man ins Quadrat, so erhält man nach einigen Vereinfachungen:

$$ds^2 = k^2 \frac{(dx^2 + dy^2)(1 - x^2 - y^2) + (x dx + y dy)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2 (1 - 2x dx - 2y dy - dx^2 - dy^2)}.$$

Vernachlässigt man schließlich unendlich kleine Größen von höherer als der zweiten Ordnung, so kommt:

$$ds^2 = k^2 \frac{(dx^2 + dy^2)(1 - x^2 - y^2) + (x dx + y dy)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

oder

$$(5) \qquad ds^2 = k^2 \frac{(1 - y^2) dx^2 + 2xy\, dx\, dy + (1 - x^2) dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Wir erinnern jetzt daran, daß Beltrami 1868 die Lobatschefskij-Bolyaische Geometrie durch die auf den Oberflächen konstanter negativer Krümmung gedeutet hat. Die Untersuchung der Geometrie auf einer solchen Fläche geschieht, indem man von einem auf der Fläche angenommenen Koordinatensystem ausgeht, und von dem Gesetz, nach dem die Abstandselemente [ds] gemessen werden. Die Wahl eines geeigneten Systems (u, v) gestattet es Beltrami, das Quadrat von ds in folgender Form darzustellen:

$$k^2 \frac{(1 - v^2) du^2 + 2uv\, du\, dv + (1 - u^2) dv^2}{(1 - u^2 - v^2)^2},$$

wo die Konstante k^2 das negative reziproke Krümmungsmaß der Oberfläche ist.[1])

Um die Eigenschaften der genannten Flächen zu untersuchen und sie denen der Lobatschefskij-Bolyaischen Metrik gegenüberzustellen, bedient sich Beltrami in seinem S. 146 genannten „Saggio" des

1) *„Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette"*; Ann. di Mat., t. VII, p. 185—204 [1866]. — Opere Mat., t. I, p. 262—80. [Milano, Hoepli, 1902.]

folgenden Kunstgriffs. Auf einer Hilfsebene stellte er die Punkte der Fläche dar, so daß dem Punkt u, v auf ihr der Punkt mit den cartesischen Koordinaten

$$x = u, \quad y = v$$

entsprach. So wurden die Punkte der Oberfläche in der Ebene dargestellt durch die Punkte im Innern des Kreises

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

die unendlich fernen Punkte auf der Fläche als Punkte auf der Peripherie dieses Kreises, die geodätischen Linien als Sehnen, geodätische Parallele als Sehnen, die sich in einem Punkt auf dem genannten Kreisumfang treffen usw. Der Ausdruck für ds^2 verwandelte sich so in den Ausdruck (5), nach dem die Abstandselemente im System $\{S\}$ gemessen werden. Hieraus folgt, daß Beltrami bei seiner ebenen Darstellung der Flächen konstanter Krümmung auf eine der projektiven Maßbestimmungen von Cayley, und im besonderen auf die Metrik bei einem Fundamentalkreis, die in den §§ 80, 81 auseinandergesetzt ist, geführt wurde.

§ 91. Die Darstellung der ebenen hyperbolischen Geometrie in der euklidischen Ebene kann auf den Fall des Raumes ausgedehnt werden. Um die Geometrie des Lobatschefskij-Bolyaischen Raumes im gewöhnlichen Raum darzustellen, genügt es in letzterem die folgenden Definitionen aufzustellen:

Raum = Gebiet der Punkte im Innern einer Kugel.

Punkt = Punkt innerhalb der Kugel.

Gerade = Sehne der Kugel.

Ebene = Punkte einer schneidenden Ebene im Innern der Kugel

Bewegungen = Projektive Transformationen des Raumes, die die Punkte im Innern der Kugel in sich überführen.

Mit einem derartigen Wörterbuch könnte man die Sätze der hyperbolischen Stereometrie in ebenso viele Eigenschaften des euklidischen Raumes für die Punkte im Innern der Kugel übersetzen.[1])

Darstellung der elliptischen Geometrie von Riemann im euklidischen Raum.

§ 92. Was die ebene Geometrie betrifft, so sagten wir schon an anderer Stelle [S. 152], daß die Geometrie des gewöhnlichen Bündels eine konkrete Darstellung des elliptischen Systems von Riemann liefert. Schneidet man dann das Bündel mit der gewöhnlichen Ebene, die durch die unendlich ferne Gerade ergänzt ist, so erhält man eine Darstellung der genannten Riemannschen Ebene auf der euklidischen Ebene.

Will man eine Darstellung des elliptischen Raumes im euklidischen Raum, so genügt es, in ihm eine eindeutige Polarität anzunehmen, der eine imaginäre nicht ausgeartete Fläche zweiten Grades entspricht, und in bezug auf diese Fläche zweiten Grades ein analoges System von Definitionen, wie das oben im hyperbolischen Fall angegebene. Wir verweilen aber nicht bei dem Gegenstand, weil er keine neue Schwierigkeit ergibt.

---

1) Mit der Deutung der nichteuklidischen Stereometrie und im allgemeinen der Geometrie mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten beschäftigte sich Beltrami ebenfalls in seiner Abhandlung: „*Teoria fondamentale degli spazî di curvatura costante*“; Annali di Matem. (2), t. II, p. 232—55 [1868]. — Opere Mat., t. I, S. 406—29 [Milano, Hoepli, 1902].



Wir bemerken aber, daß bei dieser Darstellung alle Punkte des euklidischen Raumes einschließlich der Punkte der unendlich fernen Ebene eineindeutig den Punkten des Riemannschen Raumes entsprechen würden.

Begründung der Geometrie, ausgehend von ~~graphischen~~ Begriffen.

§ 93. Die in den vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Grundsätze führen auf einen neuen Gedankengang, wobei als erste Grundlagen der Geometrie ~~graphische~~ Beziehungen auftreten, vor den Begriffen der Kongruenz und der Bewegung, deren sich Riemann und Helmholtz bedienten. Man bemerke, daß, wenn man von Anfang keine Hypothese über den Schnitt von Geraden in einer Ebene einführen will, man von einem geeigneten System von Postulaten ausgehen muß, die in einem beschränkten Raumgebiet gelten, und dann in der Folge das Anfangsgebiet ergänzen muß mittels uneigentlicher Punkte, Geraden und Ebenen [vgl. S. 168].[1]

Nachdem die projektive Geometrie entwickelt ist, kann man im Raum die metrischen Eigenschaften einführen, indem man zu den ersten Postulaten die hinzufügt, die die Bewegungen oder die Kongruenz kennzeichnen. Man findet dabei, daß eine bestimmte mit metrischen Begriffen verknüpfte Polarität des Raumes

1) Über solche Entwicklungen vgl. Kleins auf S. 169 genannte Abhandlungen; Pasch: „Vorlesungen über neuere Geometrie [Leipzig, Teubner, 1882]. Schur: „Über die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projektive Geometrie", Math. Ann., Bd. 39, S. 113—124 [1891]; Bonola: *„Sulla introduzione degli enti impropri in geometria proiettiva"*. Giornale di Mat., t. XXXVIII, p. 105—16 [1900].

durch alle Bewegungen in sich selbst übergeführt wird. Man beweist dann, daß die Fundamentalfläche dieser Polarität nur sein kann:

a) eine reelle nicht geradlinige Fläche zweiten Grades,
b) eine imaginäre Fläche zweiten Grades [mit reeller Gleichung],
c) eine ausgeartete Fläche zweiten Grades.

Man findet also auch auf diesem Wege die drei geometrischen Systeme, zu denen Riemann und Helmholtz vom elementaren Abstandsbegriff aus gelangten.[1])

Über die Unbeweisbarkeit des euklidischen Postulats.

§ 94. Bevor wir diese historische Auseinandersetzung abschließen, scheint es uns nützlich, einige Worte über die Unbeweisbarkeit des euklidischen Postulats zu sagen.

Die Tatsache selbst, daß die ungezählten Versuche zu seinem Beweis nicht das erstrebte Ziel erreichten, kann den Zweifel an seiner Unbeweisbarkeit beseitigen, da uns ja schon der geometrische Instinkt zu bezeugen scheint, daß eine so einfache Sache, wenn sie beweisbar ist, es sein muß mittels ebenfalls einfacher Schlüsse. Aber diese Betrachtung kann in keiner Weise als Beweis für die fragliche Unbeweisbarkeit gelten.

Sieht man vom euklidischen Postulat ab, um den Entwicklungen von Gauß, Lobatschefskij und Bolyai zu folgen, so errichtet man ein geometrisches Lehrgebäude, in dem keine logischen Widersprüche auftreten,

---

1) Zur Begründung dieses Resultates vgl. Bonola: „*Determinazione per via geometrica dei tre tipi di spazio: iperbolico, parabolico, ellittico*", Circolo Mat. Palermo, t. XV, p. 56—65 [1901].

und das deshalb gerade die logische Möglichkeit der nichteuklidischen Hypothese zu bestätigen scheint, das will sagen, die Unabhängigkeit des euklidischen Postulats von den ersten Prinzipien der Geometrie und also seine Unbeweisbarkeit. Indessen genügt die Tatsache, daß uns keine Widersprüche begegnet sind, nicht, uns dessen zu versichern; man muß sich vergewissern, daß bei der weiteren Verfolgung der angegebenen Entwicklungen uns niemals solche Widersprüche begegnen können. Diese Überzeugung kann ganz sicher aus der Betrachtung der Formeln der nichteuklidischen Geometrie hervorgehen. Nehmen wir in der Tat das System aller Zahltripel (x, y, z) und betrachten wir in gebräuchlicher Weise jeden Tripel als analytischen Punkt, so können wir in der Tat den Abstand zweier analytischen Punkte, ausgehend von den Formeln der oben besprochenen nichteuklidischen Trigonometrie, definieren. Wir konstruieren so ein analytisches System, das eine gebräuchliche Deutung der nichteuklidischen Geometrie gibt, und auf diese Weise ihre logische Möglichkeit beweist.

In diesem Sinne geben die Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie von Bolyai-Lobatschefskij den Beweis der Unabhängigkeit des euklidischen Postulats von den ersten Grundlagen der Geometrie [über die Gerade, die Ebene und die Kongruenz].

Man kann auch einen geometrischen Beweis derselben Unabhängigkeit suchen, wobei man an die weiteren Entwicklungen anknüpft, die wir erwähnt haben. Man muß dabei von dem Prinzip ausgehen, daß die von unserer Anschauung konstruierten Begriffe unabhängig von dem Gegenbild, das sie in der Außenwelt finden, a priori logisch möglich sind, und daß somit die euklidische Geometrie logisch möglich ist und die ganze Reihe darauf gegründeter Folgerungen.

Also gibt die Deutung der nichteuklidischen Geometrie auf den Flächen konstanter negativer Krümmung bis zu einem gewissen Grad einen ersten Beweis für die Unbeweisbarkeit des euklidischen Postulats. Genauer gesagt, es wird so festgestellt, daß das genannte Postulat nicht bewiesen werden kann auf Grund der ersten geometrischen Prinzipien, die in einem beschränkten Gebiet der Ebene gelten. In der Tat würde jeder Widerspruch, der aus der entgegengesetzten Hypothese folgen würde, sich in einen Widerspruch in der Geometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung übersetzen.

Allerdings wird, da die Beziehung zwischen der hyperbolischen Ebene und den Flächen konstanter negativer Krümmung, wie wir gesagt haben, nur für beschränkte Gebiete gilt, auf diese Weise nicht ausgeschlossen, daß das euklidische Postulat für die Gesamtebene bewiesen werden kann.

Um diesen Zweifel zu beseitigen, müßte man die abstrakte Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung betrachten, insofern als es keine konkrete Fläche des gewöhnlichen Raumes gibt, wo die unbeschränkte hyperbolische Geometrie gilt [vgl. § 73].

Aber auch hierdurch würde der Nachweis der Unbeweisbarkeit des euklidischen Postulats nur für die ebene Geometrie gelungen sein. Es bliebe noch die Möglichkeit zu untersuchen, das Postulat mittels stereometrischer Betrachtungen zu beweisen.

Die Begründung der Geometrie nach Riemanns Ansichten, wobei auf ein dreidimensionales Gebiet die Begriffe der Geometrie auf Flächen auszudehnen sind, gibt den geforderten vollständigen Nachweis der Unbeweisbarkeit auf Grund der Existenz eines analytischen nichteuklidischen Systems. Wir nennen noch einen andern analytischen Beweis. Dieser kann erhalten

werden durch die Entwicklungen von Helmholtz und Lie; aber diese beiden geben, kann man sagen, auch einen geometrischen Nachweis aus der Existenz von Transformationsgruppen des euklidischen Raumes, die den Gruppen der Bewegungen des nichteuklidischen Raumes ähnlich sind. Wohl verstanden, man hat hier auf die Betrachtung der vollständigen Geometrie zu achten.

Einfacher und geometrisch durchsichtig ist der Nachweis der Unbeweisbarkeit des euklidischen Postulats, der aus den projektiven Maßbestimmungen von Cayley zu entnehmen ist.

Dieser Beweis schließt sich an die Darstellung der nichteuklidischen Geometrie mittels der gewöhnlichen Maßbestimmung 1. b. auf einen Kreis oder eine Kugel, eine Deutung, die wir für den Fall der Ebene ausführlich entwickelt haben [vgl. §§ 84—92].[1])

Aus den vorgenannten projektiven Maßbestimmungen quillt auch, und zwar genau so einfach der Nachweis für die logische Möglichkeit der elliptischen Hypothese von Riemann, für die mit Beschränkung auf die Ebene auch die Deutung, die wir ihr in der Geometrie des Bündels [§ 71] gaben, dienen kann.

1) Ein anderer einfacher und eleganter Beweis für die Unabhängigkeit des I. Postulats ergibt sich aus der von Klein und Poincaré gebrauchten Darstellung der nichteuklidischen Ebene in der euklidischen, wobei die Punkte der nichteuklidischen Ebene vertreten sind durch die Punkte einer euklidischen Halbebene, die Geraden durch die auf dem geradlinigen Rand der Halbebene senkrecht stehenden Halbkreise usw. Auch die elliptische Geometrie kann ähnlich dargestellt werden; und entsprechend im euklidischen Raum die hyperbolische und die elliptische Raumgeometrie. — Genauere Darstellungen dieser Deutungen finden sich z. B. in Weber und Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik II, §§ 9—11 (S. 39—81), Leipzig 1905; sowie auch in Kap. II der nichteuklidischen Geometrie von H. Liebmann (Sammlung Schubert 59, Leipzig 1905).

Anhang I.

Die Cliffordschen Parallelen und die Cliffordschen Flächen. Bemerkungen über das Clifford-Kleinsche Problem.

Die Cliffordschen Parallelen.

§ 1. Die euklidischen Parallelen sind Gerade, welchen folgende Eigenschaften zukommen:

a) einer Ebene anzugehören,
b) keine Punkte gemein zu haben,
c) unveränderlichen Abstand voneinander zu haben.

Läßt man die Eigenschaft c) fort und folgt den Ansichten von Gauß, Lobatschefskij und Bolyai, so erhält man eine erste Erweiterung des Begriffs Parallelismus, aber die Parallelen, die ihr entsprechen, haben sehr wenig Eigenschaften mit den gewöhnlichen Parallelen gemein. Das kommt davon, daß die schönsten Eigenschaften, denen man beim Studium der letzteren begegnet, im wesentlichen von der Bedingung c) abhängen. Man kann sonach suchen, den Begriff des Parallelismus so zu erweitern, daß, soweit dies möglich ist, den neuen Parallelen die Grundeigenschaften zukommen, die in der euklidischen Geometrie von der Gleichheit des Abstandes herrühren. Wir lassen deshalb mit W. K. Clifford [1845—1879] bei der Definition die Bedingung, in

einer Ebene zu liegen, fort, während die beiden andern bestehen bleiben. Die neue Definition der Parallelen wird also folgende sein: **Zwei in derselben Ebene gelegene oder windschiefe Gerade heißen parallel, wenn die Punkte der einen von denen der andern unveränderlichen Abstand haben.**

§ 2. Es finden sich dann zwei Fälle, je nachdem die genannten Parallelen derselben Ebene angehören oder nicht.

Der Fall, wo die gleich weit abstehenden Geraden in derselben Ebene liegen, ist ohne weiteres erledigt, insofern unsere früheren Entwicklungen [§ 8] uns die Behauptung bestätigen, daß der entsprechende Raum der gewöhnliche euklidische Raum ist. Wir werden deshalb voraussetzen, daß die beiden äquidistanten Geraden r, s windschief sind, und daß die von den Punkten von r auf s gefällten Lote gleichlang sind: Diese Lote werden offenbar auch zu r senkrecht sein. Seien AA' und BB' zwei solche Lote. Dann hat das windschiefe Viereck $ABB'A'$, welches so entsteht, vier rechte Winkel und zwei gleiche Gegenseiten. Es ist leicht zu sehen, daß auch die beiden andern Gegenseiten AB, AB' gleich sind und daß jede Diagonale, z. B. AB', mit den Parallelen gleiche innere Wechselwinkel einschließt. Das folgt aus der Kongruenz der rechtwinkligen Dreiecke $AA'B'$, ABB'.

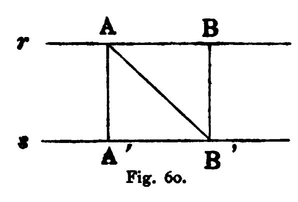


Fig. 60.

Untersucht man jetzt das Trieder $A(A'B'B)$, so können wir kraft eines Satzes über räumliche Ecken, der in allen drei geometrischen Systemen gleichzeitig gilt, schreiben:

$$\sphericalangle A'AB' + \sphericalangle B'AB > A'AB = 1 \text{ Rechter}.$$

Diese Beziehung kann bei der Gleichheit der beiden Winkel $\sphericalangle A'B'A$ und $\sphericalangle B'AB$ so geschrieben werden:

$$\sphericalangle A'AB' + \sphericalangle AB'A' > 1 \text{ Rechter.}$$

In dieser neuen Form sagt sie uns, daß im rechtwinkligen Dreieck $AA'B'$ die Summe der spitzen Winkel größer ist als ein rechter Winkel. Das bedeutet, daß in dem fraglichen Dreieck die Hyp. d. stumpfen W. erfüllt ist, und folglich, daß die windschiefen Parallelen nur im Riemannschen Raum existieren können.

§ 3. Um sodann zu beweisen, daß in Riemanns elliptischem Raum wirklich Paare von windschiefen gleich weit abstehenden Geraden vorhanden sind, betrachten wir eine willkürliche Gerade r und die unendlich vielen zu ihr senkrechten Ebenen: diese Ebenen gehen alle durch eine zweite Gerade r', die Polare von r in der absoluten Polarität des elliptischen Raumes. Eine beliebige Strecke, die einen Punkt von r mit einem Punkt von r' verbindet, ist senkrecht sowohl zu r wie zu r' und hat eine beständig der Halbgeraden gleiche Länge. Hieraus folgt, daß r und r' windschiefe gleich abstehende Gerade sind.

Aber zwei solche Gleichabstehende stellen einen ganz besonderen Fall dar, insofern als alle Punkte von r nicht nur gleichen Abstand haben von je einem bestimmten, sondern von allen Punkten von r'.

Um die Existenz gleichabständiger Geraden ins Licht zu setzen, bei denen dieser letztere besondere Umstand nicht eintritt, betrachten wir jetzt zwei Gerade r und r', wobei die eine Polare der andern ist, und auf ihnen die entsprechenden Strecken AB und $A'B'$, die einer gegebenen Strecke (kleiner als die Halbgerade) gleich sind. Verbindet man A mit A' und B mit B',

so erhält man zwei Gerade a, b, die nicht zueinander polar sind und alle beide zu den zwei Geraden r und r' senkrecht stehen. Man kann leicht beweisen, daß a und b gleichabständig sind. Hierzu nehme man auf AA' eine feste Strecke $A'H$ an, dann nehme man auf der

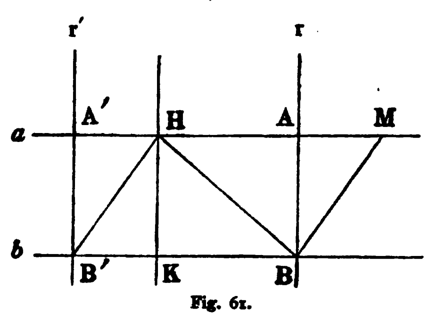


Fig. 61.

Supplementarstrecke[1]) von $A'HA$ die Strecke AM gleich $A'H$ an. Verbindet man H mit B' und M mit B, so erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke $A'B'H$ und ABM, die kraft der ausgeführten Konstruktionen kongruent sind. Man hat also die folgende Gleichheit:

$$HB' = BM.$$

Verbindet man jetzt H mit B und vergleicht man die beiden Dreiecke $HB'B$, HBM, so sieht man unmittelbar, daß sie gleich sind, da sie die Seite HB gemein haben, da ferner kraft der letzten Beziehung HB' und MB gleich sind und endlich die Seiten $B'B$ und HM ebenfalls gleich, weil jede von ihnen eine Halbgerade ist. Die beiden genannten Dreiecke werden deshalb auch entsprechend den gleichen Seiten BB' und HM' gleiche Höhen HK und BA haben. Dies besagt in andern Worten, daß die verschiedenen Punkte der Ge-

1) Die zwei Strecken, welche zwei Punkte auf einer Geraden bestimmen, heißen Supplementarstrecken.

raden *a* gleichen Abstand von der Geraden *b* haben. Und da die Begründung auch für *b* wiederholt werden kann, indem man die Lote auf *a* fällt, so schließt man, daß die Strecke *HK* nicht nur zu *b*, sondern auch zu *a* senkrecht ist.

Man bemerke weiter, daß aus der Gleichheit der verschiedenen Strecken *AB*, *HK*, *A'B'*... die Gleichheit der entsprechenden Supplementarstrecken folgt, der zufolge die Geraden *a*, *b* in doppelter Weise als gleich abständig voneinander betrachtet werden können. Würde es einmal eintreten, daß die Strecke *ab* ihrer Supplementarstrecke gleich wäre, dann würde der früher hervorgehobene Ausnahmefall eintreten, wo *a* und *b* gegenseitig Polaren sind und folglich alle Punkte von *a* gleichen Abstand von allen Punkten von *b* hätten.

§ 4. Die windschiefen Parallelen des elliptischen Raumes wurden 1873 von Clifford entdeckt.[1]) Folgendes sind ihre wichtigsten Eigenschaften:

1. Zwei Parallele bilden mit jeder Transversale gleiche korrespondierende Winkel, gleiche innere Wechselwinkel usw.

2. Sind in einem windschiefen Viereck die gegenüberliegenden Winkel gleich und ergänzen sich die anliegenden Winkel zu zwei Rechten, so sind die Gegenseiten parallel.

Ein solches Viereck kann demnach windschiefes Parallelogramm genannt werden.

Von den beiden ausgesprochenen Eigenschaften kann die erste unmittelbar bestätigt werden, die zweite könnte mit einem Schluß derselben Art wie in § 3 bewiesen werden.

---

1) „*Preliminary Sketch on Biquaternions*“; Proceedings of the London Math. Society, t. IV, p. 381—95 [1873]. — Math. Papers of Clifford, p. 181—200.



3. Sind zwei Strecken gleich und parallel, so erhält man durch die richtige Verbindung ihrer Endpunkte ein windschiefes Parallelogramm.

Diese Eigenschaft, die im gewissen Sinn als Umkehrung von 2. gelten kann, läßt sich ebenfalls unmittelbar bestätigen.

4. Durch einen Raumpunkt [M], der nicht der Polare einer Geraden [r] angehört, gehen zwei Parallele zu dieser Geraden.

In der Tat, fällt man vom Punkt M das Lot MN auf r, so sei N' der Punkt, in dem die Polare von MN die Gerade r schneidet. Auf dieser Polare nehme man dann die Strecken $N'M'$ und $N'M''$ gleich NM an und verbinde die Punkte M', M'' mit M. Die so erhaltenen Geraden r', r'' sind die gesuchten Parallelen.

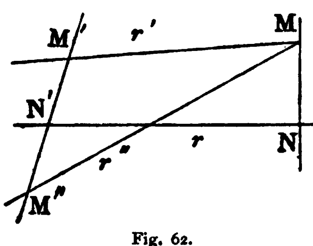


Fig. 62.

Wenn aber M der Polare von r angehörte, würde MN der Halbgeraden gleich sein, und die Punkte M'', M' würden zusammenfallen.

Folglich würden auch die beiden Parallelen r' r'' zusammenfallen.

Der von den beiden Geraden r', r'' eingeschlossene Winkel kann durch die Strecke $M'M''$ gemessen werden, die seine Schenkel auf der Polare des Scheitels ausschneiden; wir können dann sagen, daß die Hälfte des Winkels $r'r''$, d. h. des Parallelwinkels, gleich dem Parallelabstand ist.

Um die beiden Parallelen r', r'' zu unterscheiden, betrachten wir eine schraubenförmige Bewegung des Raumes mit der Achse MN, bei der augenscheinlich

der Büschel der zu MN senkrechten Ebenen und die Achse $M'M''$ dieses Büschels festbleibt. Eine solche Bewegung kann betrachtet werden als Ergebnis einer Verschiebung längs MN, begleitet von einer Drehung um dieselbe Achse; oder aus zwei Schiebungen, die eine längs MN, die andere längs $M'M''$. Wenn beide Schiebungen gleichlang sind, erhalten wir eine Gleitung des Raumes.

Die Gleitungen können rechtsdrehend und linksdrehend sein. Betrachten wir jetzt die beiden Parallelen r', r'', so ist es klar, daß eine von ihnen mit r durch eine rechtsdrehende Gleitung der Länge MN zur Deckung gebracht werden kann, während die andere auf r fallen würde durch eine linksdrehende Gleitung derselben Länge. Deswegen muß von den beiden Geraden r', r'' die eine die rechtsseitige, die andere die linksseitige Parallele zu r heißen.

5. Zwei rechtsseitige [linksseitige] Parallelen zu derselben Geraden sind zueinander rechtsseitig [linksseitig] parallel.

Seien b, c rechtsseitige Parallele zu a. Von den beiden Punkten A, A' auf a, deren Abstand der Halbgeraden gleich sei, fällen wir die Lote AB, $A'B'$ auf b und die Lote AC, $A'C'$ auf c. Die Geraden $A'B'$, $A'C'$ sind die Polaren von AB und AC, und daher ist der Winkel $\sphericalangle BAC$ gleich dem Winkel $\sphericalangle B'A'C'$. Überdies bestehen wegen der Eigenschaften der Parallelen folgende Streckengleichheiten:

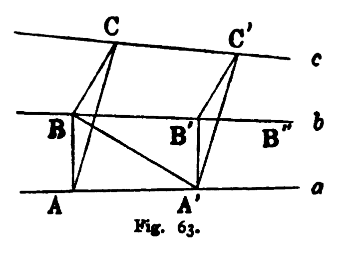


Fig. 63.

$$AB = A'B', \quad AC = A'C',$$

wonach die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ gleich sind. Es



folgt die Gleichheit der beiden Strecken BC, $B'C'$. Da überdies ist:

$$BB' = AA' = CC',$$

so hat das windschiefe Vierseit $BB'CC'$ gleiche Gegenseiten.

Aber um festzustellen, daß b, c parallel sind, bedarf es noch des Beweises, daß die anliegenden Winkel des genannten Vierecks sich zu zwei Rechten ergänzen [vgl. (2)]. Hierzu vergleichen wir die beiden Trieder $B(AB'C)$ und $B'(A'B''C')$. In ihnen bestehen indessen folgende Gleichheiten:

$$\sphericalangle ABB' = \sphericalangle A'B'B'' = 1 \text{ Rechter},$$

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'.$$

Überdies sind die beiden Kantenwinkel an BA und $B'A'$ beide gleich einem Rechten, vermehrt oder vermindert um den Kantenwinkel, dessen Normalschnitt der Winkel $\sphericalangle A'BB'$ ist: daraus folgt die Gleichheit der beiden genannten Trieder, also die Gleichheit der beiden Winkel $\sphericalangle B'BC$ und $\sphericalangle B''B'C'$. Hieraus leitet man ab, daß die Winkel B und B' im Viereck $BB'C'C$ Supplementwinkel sind, und folglich [indem man die Diagonalen des Vierecks zieht usw.], daß B Supplementwinkel von C ist, daß C Supplementwinkel von C' ist usw.

Also sind b und c parallel. Daß der Parallelismus zwischen b und c rechtsseitig ist, wenn dies für den Parallelismus von den beiden genannten Geraden und a gilt, bestätigt die Anschauung, wenn man die Figur prüft.

Die Cliffordsche Fläche.

§ 5. Aus den vorigen Betrachtungen folgt, daß alle Gerade, die sich auf drei rechtseitige Parallele stützen, zueinander linksseitig parallel

sind. Wenn in der Tat ABC eine gemeinsame Schnittgerade der drei Geraden abc ist, und man nimmt auf diesen Geraden drei gleichsinnige[1]) gleiche Strecken AA', BB', CC' an, so gehören die Punkte $A'B'C'$ einer zu ABC parallelen Geraden an. Der Parallelismus zwischen ABC und $A'B'C'$ ist dann linksseitig.

Hieraus leitet man ab, daß die drei Parallelen a, b, c eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung [die Cliffordsche Fläche] definieren, für welche die a, b, c schneidenden Geraden ein erstes System von Erzeugenden $[g_s]$ bilden. Das zweite System von Erzeugenden $[g_d]$ wird von den unendlich vielen Geraden gebildet, die wie a, b, c sich auf die g_s stützen.

Der Cliffordschen Fläche kommen die folgenden charakteristischen Eigenschaften zu:

a) zwei Erzeugende desselben Systems sind zueinander parallel,

b) zwei Erzeugende aus verschiedenen Systemen schneiden sich unter konstantem Winkel.

§ 6. Wir gehen nun zu dem Beweis über, daß die Cliffordsche Fläche zwei verschiedene Rotationsachsen besitzt. Wir ziehen deshalb von einem beliebigen Punkt M die Parallelen d [rechtsseitig], s [linksseitig] zu einer Geraden r und bezeichnen mit $\mathfrak{d}$ den Abstand MN der beiden Parallelen von r. Indem wir d festhalten, lassen wir s sich um r drehen, und es seien s', s'', s'''... die aufeinanderfolgenden Lagen, die s bei der Drehung annimmt. Es ist klar, daß s', s'', s'''... sämtlich linksseitig parallel zu r sind, und daß sie sich

1) Es ist klar, daß, nachdem ein Sinn auf der Geraden angegeben ist, auch für jede andere zu ihr parallele Gerade ein Sinn bestimmt ist.

alle auf die Gerade d stützen, derart, daß s bei seiner Drehung um r eine Cliffordsche Fläche erzeugt.

Umgekehrt, wenn d und s zwei Erzeugende einer Cliffordschen Fläche sind, die durch einen Punkt M der Fläche gehen, und 2δ der von ihnen eingeschlossene Winkel, so können wir in M das Lot auf der Ebene sd errichten und darauf die Strecken

$$ML = MN = \delta$$

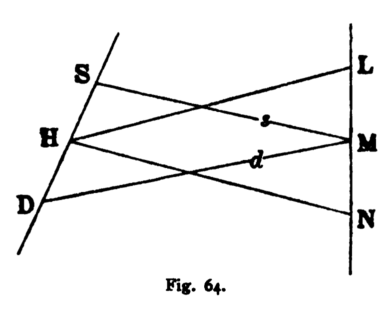


Fig. 64.

abtragen. Bezeichnet man dann mit D und S die Punkte, wo die Polare von LN die Geraden d und s schneidet, und mit H den Mittelpunkt von $DS = 2\delta$, so sind die Geraden HL, HN sowohl zu s wie zu d parallel. Von den beiden Geraden HL und HN wählen wir diejenige, welche rechtsseitig zu d und linksseitig zu s parallel ist, es sei dies beispielsweise HN. Dann kann die gegebene Cliffordsche Fläche durch Drehung von s oder d um HN erzeugt werden. Damit ist bewiesen, daß jede Cliffordsche Fläche eine Rotationsachse besitzt, und daß alle Punkte der Oberfläche denselben Abstand von ihr haben.

Die Existenz einer andern Rotationsachse ergibt sich unmittelbar aus der Bemerkung, daß alle Punkte des Raumes, die von HN gleichen Abstand haben, auch von der Polare von HN gleichen Abstand haben, die hiernach die zweite Rotationsachse der Cliffordschen Fläche ist.

§ 7. Die Gleichabständigkeit der Punkte auf der Cliffordschen Fläche von beiden Rotationsachsen führt auf eine andere sehr wichtige Eigenschaft der Fläche.

In der Tat schneidet sie jede durch eine Achse [r] gehende Ebene in einer Linie gleichen Abstandes von der Achse. Die Punkte dieser Linie gehören, da sie ja auch gleichen Abstand vom Punkte [o] haben, indem die Schnittebene die andere Rotationsachse der Fläche trifft, einem Kreis an, dessen Mittelpunkt [o] der Pol von r hinsichtlich der genannten Linie ist. Die Meridiane und die Parallelen der Oberfläche sind also Kreise.

Die Fläche kann also erzeugt werden, indem man einen Kreis um die Polare seines Mittelpunktes rotieren läßt, oder, indem man einen Kreis so gleiten läßt, daß sein Mittelpunkt eine Gerade beschreibt und seine Ebene beständig senkrecht zu ihr bleibt [Bianchi].[1])

Die letzte Entstehungsweise, die auch dem euklidischen Zylinder zukommt, setzt die Analogie zwischen der Cliffordschen Fläche und dem gewöhnlichen Kreiszylinder ins Licht. Diese Analogie könnte noch weiter entwickelt werden, indem man die Eigenschaften der [schraubenförmigen] Bahnen der Punkte der Oberfläche betrachtet, die bei einer Schraubung des Raumes um eine der Achsen der Fläche entstehen.

§ 8. Wir wollen endlich sehen, daß die Geometrie auf der Cliffordschen Fläche in dem von uns in den §§ 67, 68 erläuterten Sinn mit der euklidischen zusammenfällt. Zu diesem Zweck bestimmen wir das Gesetz, nach dem auf der Fläche die Abstandselemente [ds] gemessen werden.

Es seien u, v ein Parallelkreis und ein Meridiankreis, die von einem Punkt o der Oberfläche ausgehen,

1) „*Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica*“, Annali di Mat. (2) XXIV, p. 107 [1896]. — „*Lezioni di Geometria differenziale*“, p. 454 (S. 629 der deutschen Übersetzung).



und M ein beliebiger Punkt von ihr. Meridian und Parallelkreis durch M schneiden auf u und v zwei Bögen OP, OQ aus, deren Längen u, v die Koordinaten von M sein mögen. Die Analogie zwischen dem angenommenen Koordinatensystem und dem rechtwinkligen cartesischen ist deutlich. (Vgl. Fig. 65.)

Sei jetzt M' ein zu M unendlich benachbarter Punkt: wenn u, v die Koordinaten von M sind, so können die von M' mit $u + du$, $v + dv$ bezeichnet werden. Betrachtet man jetzt das unendlich kleine Dreieckchen $MM'N$, dessen dritte Ecke N der Schnittpunkt des Parallels von M mit dem Meridian von M' ist, so ist es klar, daß der Winkel $\sphericalangle MNM'$ ein rechter ist, und daß die Längen MN, NM' der Katheten genau du, dv sind.

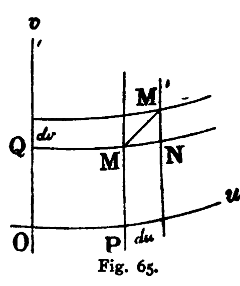


Fig. 65.

Andererseits kann das genannte Dreieck als geradlinig [auf der Tangentialebene in M gelegen] betrachtet werden, so daß zufolge der Infinitesimaleigenschaften ebener Dreiecke seine Hypotenuse ds mit den Katheten $du\,dv$ durch den Pythagoräischen Lehrsatz zusammenhängt:

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Aber diese Form für ds^2 ist charakteristisch für die gewöhnliche Geometrie, so daß wir ohne weiteres behaupten dürfen, daß auf jeder Normalregion der Cliffordschen Fläche die Eigenschaften der euklidischen Ebene verwirklicht sind.

Eine wichtige Anwendung dieser Tatsache führt zur Berechnnng des Flächeninhalts der genannten Fläche. In der Tat, zerlegen wir sie in kongruente unendlich kleine Parallelogramme mittels ihrer Erzeugenden: der

Flächeninhalt eines solchen Parallelogramms hat dann den bekannten Wert

$$dx\,dy \sin\theta,$$

wo dx, dy die Längen der Seiten und θ den konstanten von ihnen eingeschlossenen Winkel bedeutet [den Winkel von zwei Erzeugenden].

Der Flächeninhalt der Fläche wird dann werden:

$$\sum dx\,dy \sin\theta = \sin\theta \sum dx \cdot \sum dy.$$

Aber beide Summen $\sum dx$ und $\sum dy$ stellen die Länge l der Geraden dar, weshalb der Flächeninhalt Δ der Cliffordschen Fläche die sehr einfache Form annimmt:

$$\Delta = l^2 \sin\theta,$$

welche identisch ist mit der, die den Inhalt eines euklidischen Parallelogramms angibt [Clifford].[1])

Bemerkungen zum Clifford-Kleinschen Problem.

§ 9. Die in den vorigen Paragraphen erklärten Ideen von Clifford veranlaßten Klein zu einer neuen Fassung des Fundamentalproblems der Geometrie. Wir wollen eine kurze Übersicht der Ideen von Klein geben und benützen die Ergebnisse des § 68 über die Möglichkeit der Deutung der ebenen Geometrie auf den Oberflächen konstanter Krümmung. Der Vergleich der Eigenschaften der euklidischen und der nichteuklidischen Ebene mit den genannten Flächen war dort beschränkt

1) „*Preliminary sketch*", zitiert S. 199. — Die Eigenschaften der genannten Fläche zweiten Grades, die von Clifford 1873 sehr kurz angedeutet wurden, finden sich weiter entwickelt in der Abhandlung von Klein: „Zur nichteuklidischen Geometrie". [Math. Ann. XXXVII, S. 544—72, 1890.]

auf geeignet abgegrenzte Gebiete: bei der Erweiterung auf die unbegrenzten Gebiete begegneten wir im allgemeinen Unterschieden, die teils an der Anwesenheit singulärer Punkte auf den Flächen lagen [z. B. bei dem Kegel], teils an dem verschiedenen Zusammenhang. Sehen wir von den singulären Punkten ab und nehmen als Beispiel einer überall regulären Fläche konstanter Krümmung, die einen andern Zusammenhang als die euklidische Ebene hat, den gewöhnlichen Zylinder.

Der Unterschied zwischen der ebenen und der zylindrischen Geometrie, beide in unbeschränktem Sinn verstanden, wurde schon aufgedeckt [S. 148], indem wir bemerkten, daß das Postulat der Kongruenz von zwei beliebigen Geraden auf dem Zylinder zu bestehen aufhört. Trotzdem gibt es zahllose, beiden Geometrien gemeinsame Eigenschaften, die aus den zwei Eigenschaften entspringen, daß sowohl die Ebene wie der Zylinder dieselbe Krümmung haben und daß beide regulär sind.

Diese Eigenschaften kann man in den Angaben zusammenfassen:

1. Die Geometrie einer zylindrischen Normalregion ist identisch mit der Geometrie einer Normalregion der Ebene.

2. Die Geometrie einer beliebigen Normalregion des Zylinders, die um einen willkürlichen Punkt von ihm herum angegeben ist, ist identisch mit der Geometrie einer beliebigen Normalregion der Ebene.

Die Wichtigkeit eines Vergleichs zwischen der Geometrie der Ebene und der einer Fläche, der sich auf die Eigenschaften 1. und 2. stützt, geht aus folgenden Betrachtungen hervor:

Eine auf experimentelle Kriterien erbaute Geometrie der Ebene hängt von zwei verschiedenen Gruppen von Hypothesen ab. Die erste Gruppe spricht die Gültig-

keit bestimmter Tatsachen aus, die unmittelbar in einem der Erfahrung zugänglichen Gebiet beobachtet sind [Postulate der Normalregion]; die zweite Gruppe dehnt einige Eigenschaften des Anfangsgebiets auf unzugängliche Gebiete aus [Postulate der Ausdehnung].

Die Postulate der Ausdehnung könnten z. B. verlangen, daß in der ganzen Ebene die Eigenschaften des zugänglichen Gebiets gültig bleiben: wir würden dann nur zu den beiden Formen der parabolischen und der hyperbolischen Ebene geführt; wenn aber statt dessen die genannten Postulate die Ausdehnung dieser Eigenschaften fordern, abgesehen von der, welche der Geraden den Charakter einer ungeschlossenen Linie erteilt, so müssen wir zu den beiden angegebenen Ebenen noch die elliptische Ebene hinzuzählen.

Aber die vorausgehenden Betrachtungen über die regulären Flächen konstanter Krümmung deuten auf eine allgemeinere Fassung der Postulate der Ausdehnung hin: wir könnten in der Tat einfach fordern, daß um jeden Punkt der Ebene die Eigenschaften des Anfangsgebiets gelten. Dann erweitert sich die Klasse der möglichen Formen der Ebene beträchtlich: man könnte sich z. B. eine Form der Krümmung Null vorstellen, die doppelt zusammenhängt und vollständig auf dem Zylinder des euklidischen Raumes darstellbar ist.

Die Bestimmung aller zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung, die überall regulär sind, bildet den Gegenstand des Clifford-Kleinschen Problems.

§ 10. Kann man durch geeignete reguläre Oberflächen des euklidischen Raums alle Clifford-Kleinschen Formen verwirklichen?

Die Antwort ist negativ, wie aus dem folgenden Beispiel klar hervorgeht. Die einzige reguläre abwickelbare Fläche des euklidischen Raumes, deren

Geometrie nicht identisch mit der Ebene ist, ist der Zylinder mit geschlossenem Querschnitt: andererseits ist die Cliffordsche Fläche des elliptischen Raumes eine reguläre Fläche der Krümmung Null, die von der Ebene und vom Zylinder wesentlich verschieden ist.

Es kann aber durch geeignete Festsetzungen auch im gewöhnlichen Raum die Cliffordsche Fläche dargestellt werden.

Betrachten wir zuerst den Zylinder. Wollen wir den Zylinder abwickeln, so müssen wir ihn einfach zusammenhängend machen durch einen Schnitt längs einer Erzeugenden [g]: hernach wird er mit Biegung ohne Dehnung auf der Ebene ausgebreitet, wobei er von ihr einen Streifen bedeckt, der von zwei Parallelen [$g_1 g_2$] begrenzt ist.

Zwischen den Punkten des Zylinders und denen des Streifens besteht eine eineindeutige Beziehung: eine Ausnahme bilden nur die Punkte der Erzeugenden g, deren jedem zwei Punkte entsprechen, der eine auf g_1, der andere auf g_2 gelegen. Setzt man also fest, diese beiden Punkte als identisch zu betrachten, d. h. als einen einzigen Punkt, so wird die Zuordnung eineindeutig und die Geometrie des Streifens ist unbeschränkt dieselbe wie die des Zylinders.

Eine der beschriebenen analoge Darstellung kann auch für die Cliffordsche Fläche hergestellt werden. Zuerst mache man die Fläche einfach zusammenhängend durch zwei Schnitte längs der von einem Punkt ausgehenden Erzeugenden [g, g'], wobei man im elliptischen Raum ein windschiefes Parallelogramm erhält, dessen Seiten beide die Länge der Geraden haben und dessen Winkel θ und θ' [$\theta + \theta' = 2$ Rechte] die von g und g' gebildeten Winkel sind.

Dies festgesetzt, nehmen wir auf der euklidischen Ebene einen festen Rhombus, dessen Seiten die Länge der

elliptischen Geraden haben sollen, und dessen Winkel θ und θ' sind. Auf diesem Rhombus kann kongruent dargestellt [abgewickelt] werden die Cliffordsche Fläche. Die Zuordnung zwischen den Punkten der Fläche und denen des Rhombus ist eineindeutig mit Ausnahme der Punkte von g und g', deren jedem zwei Punkte entsprechen, die auf den gegenüberliegenden Seiten des Rhombus liegen. Kommt man aber überein, diese Punkte zu je zweien als identisch zu betrachten, dann ergibt sich die ausnahmslose Eineindeutigkeit der Zuordnung und die Geometrie des Rhombus ist unbeschränkt identisch mit der der Cliffordschen Fläche.[1])

§ 11. Die angegebenen Abbildungen des Zylinders und der Cliffordschen Fläche zeigen uns, wie im Fall der Krümmung Null die Bestimmung der Clifford-Kleinschen Formen auf die Bestimmung geeigneter euklidischer Polygone zurückgeführt werden kann, die möglicherweise in Streifen ausarten, deren Seiten paarweise durch geeignete Bewegungen der Ebene ineinander übergeführt werden können und deren Winkelsumme vier Rechte beträgt [Klein].[2]) Dann bleibt nur noch übrig, die Punkte der genannten Seiten als identisch zu betrachten, um auf der gewöhnlichen Ebene die Bilder der gesuchten Formen zu erhalten.

In analoger Weise wird die Bestimmung der Clifford-Kleinschen Formen für positiven oder negativen Wert der Krümmung dargestellt und die sich anschließende Ausdehnung des gesamten Problems auf den Raum.[3])

1) Vgl.: „*Preliminary sketch*". — Siehe auch die S. 207 genannte Abhandlung von Klein: „Zur Nicht-Euklidischen Geometrie".

2) In der genannten Abhandlung.

3) Eine systematische Behandlung des Clifford-Kleinschen Problems findet sich in Killings Werk: „Einführung in die Grundlagen der Geometrie", Bd. I, S. 271—349. [Paderborn 1893.]

Anhang II.

Die Grundprinzipien der Statik und das euklidische Postulat.

Über das Prinzip des Hebels.

§ 1. Um das Prinzip des Hebels zu beweisen, bedient sich Archimedes [287—212] bestimmter Annahmen, die er teils ausspricht, teils als selbstverständlich annimmt. Unter den mit Stillschweigen übergangenen Hypothesen ist außer der, die in moderner Bezeichnung die Hypothese der Verstärkung der Bänder[1]) heißt, noch eine, die gerade das Gleichgewicht des Hebels betrifft und so ausgesprochen werden könnte:

Ein in seinem Mittelpunkt gestützter Hebel ist im Gleichgewicht, wenn man an einem Ende das Gewicht $2P$ anbringt und am andern Ende einen neuen Hebel in seinem Mittelpunkt aufhängt, der an jedem Ende das Gewicht P trägt.[2])

Ohne hier der Geschichte der Kritik an Archimedes wegen des Gebrauchs dieser Hypothese nach-

---

1) Diese Hypothese kann so ausgesprochen werden: „Wenn miteinander verbundene Körper in Gleichgewicht sind unter der Einwirkung von gegebenen Kräften, so bleiben sie in Gleichgewicht, wenn zu den schon vorhandenen Verbindungen neue hinzukommen.“ Vgl. z. B. J. Andrade: „*Leçons de Mécanique Physique*“, p. 59. [Paris 1898.]

2) Vgl.: „*Archimedis opera Omnia*“ in der kritischen Ausgabe von J. L. Heiberg, t. II, p. 142 ff. [Leipzig, Teubner, 1881.]

zugehen und den verschiedenen Beweisversuchen[1]), wollen wir für unsern Zweck die Betrachtungen von Lagrange anführen, weil man aus ihnen in einfacher und klarer Weise ein sehr wichtiges Band zwischen der fraglichen Hypothese und dem Parallelenpostulat ableiten kann.

§ 2. Sei ABD ein gleichschenkliges Dreieck

$$[AD = BD],$$

dessen Ecken A und B zwei gleiche Gewichte P tragen und dessen Ecke D ein Gewicht $2P$ trägt. Dieses Dreieck wird in Gleichgewicht um die Gerade MN sein, die die Mittelpunkte der gleichen Seiten des Dreiecks verbindet, weil jede dieser Seiten als ein Hebel betrachtet werden kann, dessen Enden gleiche Gewichte tragen.

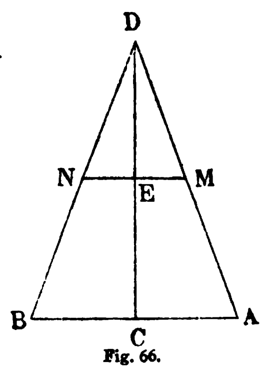


Fig. 66.

Aber das Gleichgewicht der Figur kann man auch erhalten, wenn man das Dreieck auf eine Gerade stützt, die durch die Ecke D und den Mittelpunkt $[C]$ der Linie AB hindurchgeht, weshalb, wenn man mit E den Schnittpunkt der Achsen MN und CD bezeichnet, unser Dreieck auch in Gleichgewicht sein wird, wenn man es im Punkte E aufhängt.

---

1) Vgl. z. B. E. Mach: „Die Mechanik in ihrer Entwicklung". 3. Aufl. Leipzig 1897, S. 12. — Über die verschiedenen Hypothesen, auf die man den Beweis des Hebelprinzips gründen kann, verweisen wir auf das neue Werk von P. Duhem: „*Les origines de la Statique*" [Paris, Hermann 1905], besonders auf Zusatz C [p. 365—68]: *Sur les divers axiomes d'où se peut déduire la théorie du levier.*

„Or,“ fährt Lagrange fort, „comme l'axe [MN] passe par le milieu des deux côtés du triangle, il passera aussi nécessairement par le milieu de la droite menée du sommet du triangle au milieu [C] de sa base; donc le levier transversal [CD] aura le point d'appui [E] dans le milieu et devra, par conséquent, être chargé également aux bouts [C, D]: donc la charge que supporte le point d'appui du levier, qui fait la base du triangle, et qui est chargé, à ses deux extrémités de poids égaux, sera égale au poids double du sommet et, par conséquent, égale à la somme des deux poids.“ [1])

§ 3. Die Begründung von Lagrange enthält implizite einige Hypothesen statischer Natur über Symmetrie, Verstärkung der Bänder usw.[2]), und außerdem benützt sie eine geometrische Eigenschaft des euklidischen Dreiecks. Will man aber von dieser absehen, die unter einem gewissen Gesichtspunkt natürlich erscheint, so werden die vorigen Schlüsse abgeändert.

In der Tat kann man unbeschadet des Prinzips, daß das Dreieck ABD in Gleichgewicht ist um den Schnittpunkt [E] der beiden Achsen MN und CD, nicht behaupten, daß E der Mittelpunkt von CD ist, weil dies der Annahme des Euklidschen Postulats gleich käme.

Folglich kann man nicht behaupten, daß die beiden in A und B angebrachten Gewichte durch ein einziges in C angebrachtes Gewicht $2P$ ersetzt werden können, weil, wenn diese Ersetzung statthaft wäre, Gleichgewicht eines Hebels, bei gleichen Gewichten an den Enden, bestehen könnte, und

1) „*Oeuvres de Lagrange*“, t. XI, p. 4—5.

2) Über die Analyse der physikalischen Prinzipien, auf denen die gewöhnliche Statik beruht, vgl. man Kap. V des Werkes von F. Enriques: „*Problemi della Scienza*“. [Bologna, Zanichelli, 1906.]

zwar um einen Punkt, der nicht die Hebelmitte zu sein braucht.

Nimmt man umgekehrt mit Archimedes an, daß zwei gleiche Gewichte durch ein einziges Gewicht im Mittelpunkt des Hebels ersetzt werden können, so beweist man leicht, daß E der Mittelpunkt von CD und folglich ABD ein euklidisches Dreieck ist.

Hiermit ist die Gleichwertigkeit zwischen dem V. Postulat von Euklid und der genannten Hypothese des Archimedes erwiesen. Diese Gleichwertigkeit ist wohl verstanden relativ, sie gilt für das System von Hypothesen, das einerseits aus den oben erwähnten statischen Hypothesen und andererseits aus den gewöhnlichen geometrischen Hypothesen besteht.

Bei Anwendung moderner Bezeichnung können wir von Kräften, von der Zusammensetzung von Kräften, von der Resultante an Stelle von Gewichten, Hebeln usw. sprechen.

Dann nimmt die Hypothese folgende Form an:

Zwei Kräfte gleicher Intensität, die in derselben Ebene liegen und senkrecht an den Endpunkten einer Strecke und auf derselben Seite von ihr angebracht sind, setzen sich in einer einzigen Kraft zusammen, deren Intensität gleich der Summe der Intensitäten der gegebenen Kräfte ist, und die im Mittelpunkt der Strecke angebracht ist.

Kraft der obigen Ausführungen fordert die Anwendbarkeit dieses Prinzips der Zusammensetzung, daß im Raum die gewöhnliche Parallelentheorie gilt.

Über die Zusammensetzung der Kräfte in einem Punkt.

§ 4. Auch das andere Fundamentalprinzip der Statik, nämlich das Gesetz des Parallelogramms

der Kräfte, ist bei der jetzt gewöhnlich hinzugefügten geometrischen Deutung in engem Zusammenhang mit der euklidischen Natur des Raumes. Prüft man freilich den wesentlichen Teil dieses Prinzips, nämlich den analytischen Ausdruck für die Resultante [R] von zwei gleichen in einem Punkt angreifenden Kräften [P], so kann man leicht beweisen, daß es unabhängig von irgend einer Annahme über die Parallelen besteht. Das tritt in Augenschein durch Ableitung der Formel:

$$R = 2P \cdot \cos\alpha,$$

wo 2α der von den zusammentreffenden Kräften gebildete Winkel ist, aus folgenden Prinzipien:

1. Zwei oder mehrere in einem Punkt angreifende Kräfte haben eine bestimmte Resultante.

2. Die Resultante von zwei gleichen und entgegengesetzt gerichteten Kräften ist Null.

3. Die Resultante von zwei oder mehreren in einem Punkt angebrachten Kräften, die dieselbe Wirkungslinie haben, hat als Intensität die Summe der Intensitäten der gegebenen Kräfte, ferner denselben Angriffspunkt und dieselbe Wirkungslinie.

4. Die Resultante von zwei gleich großen in einem Punkt angebrachten Kräften hat die Richtung der Halbierungslinie des von den beiden Kräften gebildeten Winkels.

5. Die Intensität der Resultante ist eine stetige Funktion der Intensitäten der Komponenten.

Wir wollen schnell sehen, wie man das Ziel erreicht. Der Wert [R] der Resultante der Kräfte gleicher Intensität [P], die den Winkel 2α miteinander bilden, ist eine Funktion von P und α allein, so daß wir schreiben können:

$$R = 2f(P, \alpha).$$

Eine erste Anwendung der aufgezählten Prinzipien führt zum Beweis der Proportionalität zwischen R und P, und zwar unabhängig von irgend einer Annahme über die Parallelen [vgl. die Anmerkung S. 228], dann kann die vorstehende Beziehung einfach so geschrieben werden:

$$R = 2Pf(\alpha).$$

Es handelt sich jetzt um die Bestimmung der Form von $f(\alpha)$.

§ 5. Berechnen wir $f(\alpha)$ für einige spezielle Werte des Arguments.

1. Sei $\alpha = 45^0$.

Im Punkte O, wo die Kräfte $P_1 P_2$ gleicher Intensität P sich treffen, denken wir uns zwei gleiche Kräfte von entgegengesetzter Richtung angebracht, senkrecht zu R und von der Intensität $\frac{1}{2}R$. Zu gleicher Zeit denken wir uns R in zwei andere Kräfte von der Richtung R und der Stärke $\frac{1}{2}R$ zerlegt. Wir können dann jedes P als Resultante von zwei rechtwinklig wirkenden Kräften betrachten mit der Intensität $\frac{1}{2}R$. Dann werden wir erhalten:

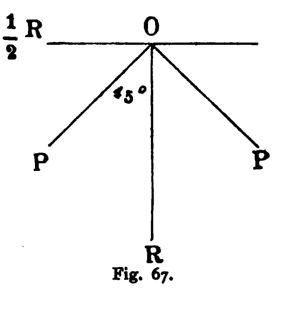


Fig. 67.

$$P = 2 \cdot \tfrac{1}{2}R \cdot f(45^0).$$

Andererseits ist R als Resultante von P_1 und P_2:

$$R = 2P \cdot f(45^0).$$

Aus diesen beiden Beziehungen erhält man:

$$f(45^0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

2) Sei $\alpha = 60^0$.

Wir bringen dann in O entgegengesetzt zu R eine Kraft R' von gleicher Stärke wie R an.

Das aus den beiden Kräften P und aus R' gebildete System (Fig. 68) ist ein Gleichgewichtssystem. Dann ergibt sich aus der Symmetrie der Figur $R' = P$, also $R = P$.

Da auf der anderen Seite:

$$R = 2P \cdot f(60^0),$$

so haben wir:

$$f(60^0) = \frac{1}{2}.$$

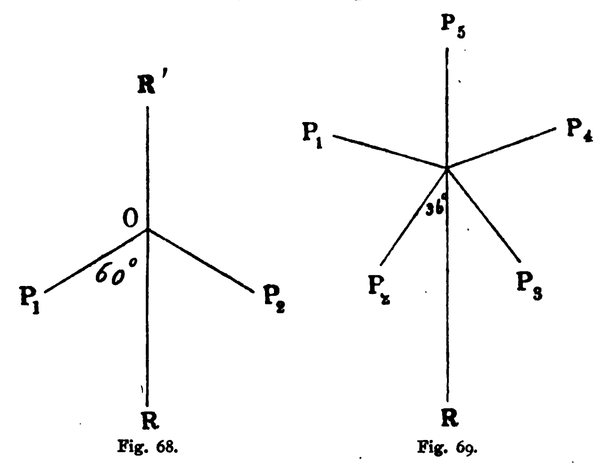


Fig. 68. Fig. 69.

3) Es sei $\alpha = 36^0$.

Sind in O fünf Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$ (Fig. 69) von gleicher Intensität P angebracht, und zwar so, daß jede von ihnen mit der folgenden einen Winkel von 72^0 bildet, so erhält man ein System im Gleichgewicht. Für die Resultante R von $P_2 P_3$ haben wir dann:

$$R = 2P \cdot f(36^0).$$

Für die Resultante R' von $P_1 P_4$ haben wir statt dessen

$$R' = 2P \cdot f(72^0).$$

Andererseits hat R' dieselbe Richtung wie P_5, d. h. die entgegengesetzte Richtung von R, weshalb:

$$2P \cdot f(36^0) = 2P \cdot f(72^0) + P,$$

also

(1) $$2f(36^0) = 2f(72^0) + 1.$$

Komponieren wir statt dessen P_1 mit P_2 und P_3 mit P_4, so erhalten wir zwei Kräfte von der Intensität $2P \cdot f(36^0)$, die miteinander einen Winkel von 144^0 einschließen. Setzt man die beiden erhaltenen Kräfte zusammen, so bekommen wir eine neue Kraft R'' der Intensität

$$4P \cdot f(36^0) f(72^0).$$

Aber R'' hat wegen der Symmetrie der Figur dieselbe Riohtung und den entgegengesetzten Sinn wie P_5, deshalb können wir, da Gleichgewicht bestehen muß, schreiben

$$P = 4P \cdot f(36^0) \cdot f(72^0)$$

oder

(2) $$1 = 4 f(36^0) f(72^0).$$

Aus den Beziehungen (1) und (2) erhält man, wenn man noch $f(36^0)$ und $f(72^0)$ auflöst:

$$f(36^0) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad f(72^0) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

§ 6. Durch ein ähnliches Verfahren, wie das im vorhergehenden Paragraphen, könnte man weitere Werte für $f(\alpha)$ ableiten. Wir wollen uns aber auf die berechneten beschränken und erhalten, indem wir sie mit den entsprechenden Werten der Funktion $\cos \alpha$ zusammenstellen, folgende Tabelle:

$$\cos 0^0 = 1 \qquad f(0^0) = 1$$

$$\cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad f(36^0) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad f(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 60^0 = \frac{1}{2} \qquad f(60^0) = \frac{1}{2}$$

$$\cos 72^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad f(72^0) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 90^0 = 0 \qquad f(90^0) = 0.$$

Die Tabelle läßt uns die Identität der beiden Funktionen $f(\alpha)$ und $\cos\alpha$ voraussehen. Um eine weitere Bestätigung dieser Tatsache zu haben, bestimmen wir die Funktionalgleichung, der die Funktion $f(\alpha)$ genügt (Fig. 70).

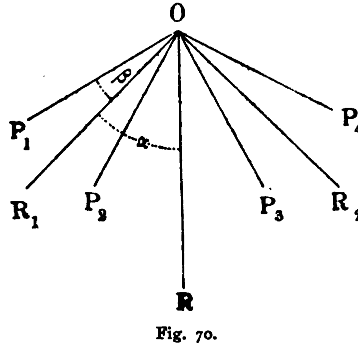


Fig. 70.

Wir denken uns deshalb im Punkte O vier Kräfte $P_1 P_2 P_3 P_4$ von der Intensität P angebracht, die miteinander die folgenden Winkel bilden:

$$\sphericalangle P_1 P_2 = \sphericalangle P_3 P_4 = 2\beta$$

$$\sphericalangle P_2 P_3 = 2(\alpha - \beta)$$

$$\sphericalangle P_1 P_4 = 2(\alpha + \beta).$$

Wir wollen die Resultante R dieser vier Kräfte nach zwei verschiedenen Verfahren bestimmen.

Setzen wir P_1 mit P_2 und P_3 mit P_4 zusammen, so erhalten wir zwei Kräfte $R_1 R_2$ von der Intensität

$$2Pf(\beta),$$

die miteinander den Winkel 2α bilden. Setzt man R_1 und R_2 zu einer einzigen Kraft R zusammen, so kommt:

$$R = 4P \cdot f(\alpha) f(\beta).$$

Setzt man auf der andern Seite P_1 mit P_4 und P_2 mit P_3 zusammen, so erhält man zwei Teilresultanten, die beide die Richtung von R haben, und entsprechend die Intensitäten:

$$2Pf(\alpha+\beta), \quad 2Pf(\alpha-\beta).$$

Diese beiden Kräfte setzen sich zu einer Summe zusammen und ergeben:

$$R = 2P \cdot (f(\alpha+\beta) + f(\alpha-\beta)).$$

Aus dem Vergleich der beiden Werte von R leitet man ab

$$(1) \qquad 2f(\alpha)\cdot f(\beta) = f(\alpha+\beta) + f(\alpha-\beta),$$

das ist die gesuchte Funktionalgleichung.

Erinnern wir uns jetzt, daß

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cdot\cos\beta,$$

und vergegenwärtigen wir uns die Identität zwischen den Werten von $f(\alpha)$ und $\cos\alpha$, die sich (für bestimmte Werte von α) aus der vorigen Tabelle ergibt, und der Hypothese der Stetigkeit von $f(\alpha)$, so können wir ohne weitere Entwicklungen schreiben:

$$f(\alpha) = \cos\alpha$$

und folglich

$$R = 2P\cdot\cos\alpha.$$

Die Gültigkeit dieser Formel des euklidischen Raumes wird so auch auf die nichteuklidischen Räume ausgedehnt.

§ 7. Das Gesetz der Zusammensetzung von zwei gleichen sich schneidenden Kräften gestattet das allgemeine Problem der Resultante zu lösen, weil man ohne weitere Hypothesen die Komponenten einer Kraft R nach zwei rechtwinkligen Achsen angeben kann, die von ihrem Angriffspunkt O ausgehen.

Seien in der Tat x, y diese Achsen und α, β die Winkel, die sie mit R bilden. Man zieht durch O die Gerade, die mit x den Winkel α und mit y den Winkel β bildet. Auf dieser Geraden denke man sich, von O ausgehend, zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte P_1 und P_2 von der Intensität $\frac{1}{2}R$ und man zerlege R in zwei Kräfte $P = \frac{1}{2}R$, die beide in der Richtung R wirken. Das System $P_1 P_2 PP$ hat zur Resultante R. Setzen wir jetzt P_1 und P, dann P_2 und P zusammen: wir erhalten zwei Kräfte, die eine in der Richtung der x-Achse, die andere in der Richtung der y-Achse und von der Intensität

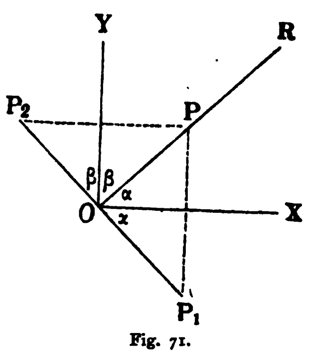


Fig. 71.

$$X = R \cdot \cos \alpha,$$

$$Y = R \cdot \cos \beta.$$

Diese beiden Kräfte sind die Komponenten von R nach den beiden angegebenen Achsen. Was ihre Intensitäten betrifft, so fallen sie zusammen mit denen, die uns in der gewöhnlichen auf das Prinzip des Kräfteparallelogramms begründeten Theorie begegnen: aber die Abschnitte OX und OY, welche sie auf den Achsen darstellen, sind nicht notwendig, wie im euklidischen Fall, die Projektionen von R. In der Tat, man kann leicht sehen, daß, falls die genannten Strecken die Orthogonalprojektionen von R auf x und y wären, in der Ebene die euklidische Hypothese gelten würde.

§ 8. Die in § 6 angewendete Funktionalmethode für die Zusammensetzung sich in einem Punkt treffender Kräfte rührt im wesentlichen von D. de Foncenex

[1734—1799] her. Mit einem ähnlichen Verfahren wie dasjenige, das uns zu der Gleichung geführt hat, der $f(\alpha)[=y]$ genügt, gelangte Foncenex zu der Differentialgleichung [1]):

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} + k^2y = 0,$$

aus der er durch Integration und Berücksichtigung der Anfangsbedingungen des Problems den bekannten Ausdruck für $f(\alpha)$ erhielt.

Die Anwendung der Prinzipien der Infinitesimalrechnung fordert aber die Stetigkeit und Differentiierbarkeit von $f(\alpha)$, Bedingungen, die, wie Foncenex bemerkt, in der [physikalischen] Natur des Problems selbst liegen: da er aber vordringen will: „jusqu'aux difficultes les moins fondées", so greift er auf die Rechnung mit endlichen Differenzen zurück und auf eine Differenzengleichung, die ihm gestattet, $f(\alpha)$ für alle mit π kommensurabeln Werte zu berechnen. Den Fall der mit π inkommensurabeln α behandelt er: „par une méthode familière aux Géomètres et frequente surtout dans les écrits des Anciens", nämlich mit der Exhaustionsmethode.[2])

---

1) Die Gleichung könnte aus (1) S. 221 in folgender Weise erhalten werden. Setzt man $\beta = d\alpha$ und nimmt man an, daß $f(\alpha)$ für jeden Wert von α in eine Taylorsche Reihe entwickelbar ist, so erhält man:

$$2f(\alpha)\left(f(0) + d\alpha \cdot f'(0) + \frac{d\alpha^2}{2}f''(0)\cdots\right)$$
$$= 2f(\alpha) + 2\frac{d\alpha^2}{2}f''(\alpha) + \cdots$$

Setzt man die Koeffizienten von $d\alpha^2$ gleich und setzt $y = f(\alpha)$ und $k^2 = -f''(0)$, so erhält man:

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} + k^2y = 0 \quad \text{w. z. b. w.}$$

2) Vgl. Foncenex: *„Sur les principes fondamenteaux de*

Das ganze Verfahren von Foncenex und ebenso das in § 6 entwickelte ist unabhängig vom euklidischen Postulat: allerdings ist zu bemerken, daß Foncenex nicht den Zweck hat, das Gesetz der Zusammensetzung von Kräften im Punkt von der Parallelentheorie zu befreien, sondern vielmehr das fragliche Gesetz zu beweisen, da er vielleicht, wie andere Geometer [D. Bernouilli, D'Alembert], glaubte, es sei eine von jeder Erfahrung unabhängige Wahrheit.

Die nichteuklidische Statik.

§ 9. Nachdem so bewiesen ist, daß das analytische Gesetz für die Zusammensetzung der Kräfte im Punkt nicht vom V. Postulat des Euklid abhängt, gehen wir zur Ableitung des Gesetzes über, nach dem die Kräfte senkrecht zu einer Geraden zusammenzusetzen sind.

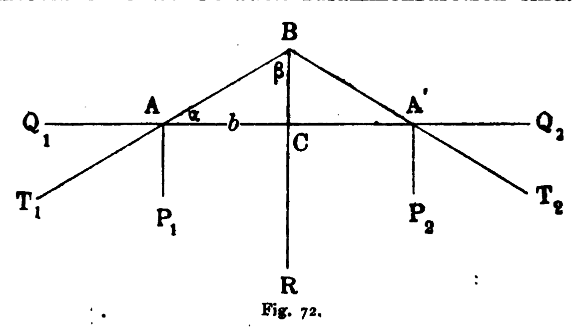


Fig. 72.

Seien A und A' die Angriffspunkte der Kräfte P_1 und P_2 von der Intensität P; sei C der Mittelpunkt von

la Mécanique"; Miscellanea Taurinensia, t. II, p. 305—15 [1760—61]. Die Betrachtungen von Foncenex sind wiedergegeben und erläutert von A. Genocchi in der Schrift: „*Sur un Mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géometries non euclidiennes*"; Torino, Memorie (2), t. XXIX, p. 366—71 [1877].

AA' und B ein Punkt des Lotes CB auf AA'. Man verbinde A mit B und setze

$$\beta = \sphericalangle ABC, \qquad \alpha = \sphericalangle BAC;$$

dann ist klar, daß die Kraft P_1 als Komponente einer Kraft T_1, die in A angebracht ist und die Richtung BA hat, betrachtet werden kann. Die Intensität T dieser Kraft ist gegeben durch

$$T = \frac{P}{\sin \alpha}.$$

Die andere Komponente Q_1 von T_1, senkrecht zu P_1 gerichtet, hat die Intensität:

$$Q = T \cdot \cos \alpha = P \operatorname{cotang} \alpha.$$

Wiederholen wir dieselben Betrachtungen für die Kraft P_2, so erhalten wir auf der Ebene die folgenden Kräftesysteme:

1. System $P_1 P_2$;
2. System $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$;
3. System $T_1 T_2$.

Nimmt man an, daß man den Angriffspunkt einer Kraft längs ihrer Wirkungslinie verlegen kann, so ist es klar, daß die beiden ersten Systeme äquivalent sind, und da das zweite dem dritten äquivalent ist, so können wir nach 3. die beiden Kräfte P_1 und P_2 durch die beiden andern T_1 und T_2 ersetzen. Die letzteren können längs ihrer Wirkungslinie verlegt werden und werden sich zu der Einzelkraft

$$R = 2\,T \cos \beta = 2\,P\,\frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$$

zusammensetzen, die ihrerseits nach C verlegbar ist, wobei sie die Richtung senkrecht zu AA' beibehält.

Das oben erhaltene Resultat, dessen Unabhängigkeit vom euklidischen Postulat auf der Hand liegt, kann auf die drei Geometrien angewandt werden.

Euklidische Geometrie: Man hat im Dreieck ABC:

$$\cos\beta = \sin\alpha.$$

Es folgt:

$$R = 2P.$$

Lobatschefskij-Bolyaische Geometrie: Bezeichnet man die Strecke AA' mit $2b$, so hat man im Dreieck ABC [S. 123]

$$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = Ch\,\frac{b}{k}.$$

Es folgt:

$$R = 2P\,.\,Ch\,\frac{b}{k}.$$

Riemannsche Geometrie: Man hat wieder in demselben Dreieck:

$$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \cos\frac{b}{k},$$

woraus

$$R = 2P\cos\frac{b}{k}.$$

Folgerung. Einzig im euklidischen Raum ist die Resultante von zwei gleichen Kräften, die senkrecht zu einer Geraden angreifen, der Summe der Intensitäten der gegebenen Kräfte gleich. In den nichteuklidischen Räumen hängt die Resultante in der oben angegebenen Weise vom Abstand der Angriffspunkte der beiden Komponenten ab.[1])

§ 10. Den Fall zweier ungleicher Kräfte P, Q senkrecht zu derselben Geraden behandelt man in ähn-

1) Über weitere Entwicklungen der nichteuklidischen Statik verweisen wir den Leser auf folgende Autoren: J. M. de Tilly: „*Études de Mécanique abstraite*". Mém. Couronnés et autres mém., t. XXI [1870]. — J. Andrade: „*La statique et les Géométries de Lobatschewsky, d'Euclide et de Riemann*". Anhang II des auf S. 212 genannten Werkes.



licher Weise wie den vorhergehenden. In der euklidischen Geometrie würde man zu den bekannten Beziehungen gelangen:

$$R = P + Q,$$

$$\frac{R}{p+q} = \frac{P}{q} = \frac{Q}{p};$$

in der Lobatschefskij-Bolyaischen Geometrie würde das Problem der Resultante auf die folgenden Formeln führen:

$$R = P \cdot Ch\frac{p}{k} + Q\, Ch\frac{q}{k},$$

$$\frac{R}{Sh\frac{p+q}{k}} = \frac{P}{Sh\frac{q}{k}} = \frac{Q}{Sh\frac{q}{k}},$$

aus denen man durch die bekannte Einführung der Kreisfunktionen an Stelle der hyperbolischen unmittelbar zu den entsprechenden der Riemannschen Geometrie gelangt:

$$R = P\cos\frac{p}{k} + Q\cos\frac{q}{k},$$

$$\frac{R}{\sin\frac{p+q}{k}} = \frac{P}{\sin\frac{q}{k}} = \frac{Q}{\sin\frac{p}{k}}.$$

In diesen Formeln bedeuten p, q die Abstände der Angriffspunkte von P und Q vom Angriffspunkte von R.

Diese Ergebnisse können in einer einzigen Formel zusammengefaßt werden, die für die absolute Geometrie gilt:

$$R = P \cdot Ep + Q \cdot Eq,$$

$$\frac{R}{\bigcirc(p+q)} = \frac{P}{\bigcirc q} = \frac{Q}{\bigcirc p}.$$

Um sie direkt abzuleiten, genügte es in den oben angedeuteten Beweisen sich der absoluten Trigonometrie zu bedienen, statt der euklidischen und der nichteuklidischen.

Statische Ableitung der ebenen Trigonometrie.

§ 11. Wir wollen endlich zusehen, wie man die Frage umkehren kann: d. h., wie man, wenn das Gesetz der Zusammensetzung der Kräfte gegeben ist, die Fundamentalbeziehungen der Trigonometrie ableiten kann.

Dazu bemerken wir, daß die Intensität R der Resultante der beiden gleichen senkrecht zu einer Achse $AA' = 2b$ wirkenden Kräfte im allgemeinen eine Funktion von P und b sein wird; bezeichnen wir diese Funktion mit $\varphi(P, b)$, so werden wir haben:

$$R = \varphi(P, b),$$

oder einfacher[1]):

$$R = P \cdot \varphi(b).$$

---

1) Die Proportionalität zwischen R und P ergibt sich aus dem assoziativen Gesetz, das als Grundlage für die Zusammensetzung von Kräften dient. In der Tat, denken wir beide Kräfte P, die in A und A' wirken, in die Summe von n Kräften der Intensität $P:n$ zerlegt, so erhalten wir durch Zusammensetzung für R den folgenden Ausdruck:

$$R = n\varphi\left(\frac{P}{n}, b\right).$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem anderen im Text gegebenen, so erhält man:

$$\varphi\left(\frac{P}{n}, b\right) = \frac{1}{n}\varphi(P, b).$$

In analoger Weise beweist man die Formel:

$$\varphi(kP, b) = k\varphi(P, b)$$

für jedes rationale k und man dehnt sie auf irrationale k aus. So erhalten wir, wenn $P = 1$, $k = P$ gesetzt ist:

$$\varphi(P, b) = P \cdot \varphi(b),$$

w. z. b. w.

Andererseits wurden wir in § 9 [S. 225] zu dem folgenden Ausdruck für R geführt:

$$R = 2P\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Eliminiert man aus dieser Formel und der vorhergehenden R und P, so erhält man:

$$\varphi(b) = 2\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Wenn also der analytische Ausdruck für $\varphi(b)$ bekannt ist, so wird die erhaltene Formel eine Beziehung zwischen Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen Dreiecks ergeben.

Um $\varphi(b)$ zu bestimmen, muß man notwendig die betreffende Funktionalgleichung aufstellen. Hierfür bringen wir senkrecht zur Geraden AA' vier gleiche Kräfte $P_1P_2P_3P_4$ so an, daß die Angriffspunkte von P_1 und P_4 voneinander den Abstand $2(a+b)$ haben und die von P_2 und P_3 den Abstand $2(b-a)$. (Vgl. Fig. 73.)

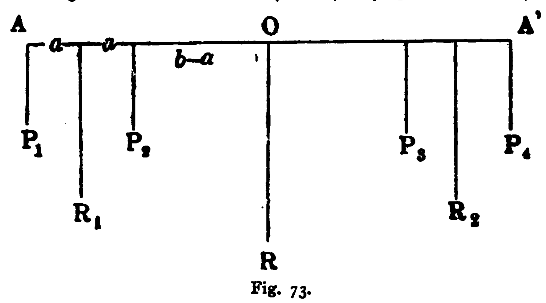


Fig. 73.

Wir können die Resultante R von diesen vier Kräften in zwei verschiedenen Weisen bestimmen:

1. Setzt man P_1 mit P_2 und P_3 mit P_4 zusammen, so erhält man zwei Kräfte R_1R_2 der Intensität:

$$P\cdot\varphi(a);$$

setzt man R_1 und R_2 zusammen, so werden wir erhalten:

$$R = P \cdot \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

2. Setzt man P_1 mit P_4 zusammen, so erhält man eine Kraft der Intensität:

$$P \cdot \varphi(b + a);$$

setzt man P_2 mit P_3 zusammen, so erhält man eine andere Kraft der Intensität:

$$P \cdot \varphi(b - a).$$

Setzt man endlich die beiden Teilresultanten zusammen, so erhält man:

$$R = P \cdot \varphi(b + a) + P \cdot \varphi(b - a).$$

Aus den beiden Ausdrücken für R erhält man die Funktionalgleichung, der $\varphi(b)$ genügt:

(2) $$\varphi(b) \cdot \varphi(a) = \varphi(b + a) + \varphi(b - a).$$

Diese Gleichung wird, wenn man $\varphi(b) = 2f(b)$ setzt, identisch mit der in § 6 [S. 221] bei der Behandlung der Kräfte im Punkt auftretenden.

Die für die Ableitung von (2) befolgte Methode verdankt man D'Alembert[1]): nehmen wir überdies a und b untereinander gleich an und beachtet man, daß $\varphi(0) = 2$ ist, so gelangt man zu einer zweiten Gleichung:

(3) $$[\varphi(x)]^2 = \varphi(2x) + 2,$$

die zuvor Foncenex abgeleitet hat bei dem Problem des Gleichgewichts des Hebels.[2])

§ 12. Das statische Problem der Zusammensetzung der Kräfte ist zurückgeführt auf die Auflösung einer Funktionalgleichung.

---

1) „*Opuscules mathématiques*“, t. VI, p. 371 [1779].

2) Vgl. die S. 224 genannte Abhandlung von Foncenex, p. 319—22.

Foncenex, der es zuerst so behandelt hat[1]), meinte, $\varphi(x) =$ constans sei die einzige Auflösung von (3), wo dann die Konstante, wie man leicht bestätigt, den Zahlenwert 2 hat. In der Folge integrierten Laplace und D'Alembert die Gleichung (3) und erhielten:

$$\varphi(x) = e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}},$$

wo c eine Konstante oder irgend eine Funktion ist, die denselben Wert hat, wenn man x in $2x$ verändert.[2])

Die Lösung von Laplace und D'Alembert führt dann, wenn man sie auf das statische Problem des vorigen Paragraphen anwendet, darauf, den Fall auszuschließen, wo c eine Funktion von x ist; da überdies für c Werte vom Typus $a + ib$, wo a und b beide von Null verschieden, unzulässig sind, so haben wir drei mögliche Fälle, je nachdem c reell, rein imaginär oder unendlich ist.[3]) Entsprechend diesen drei Fällen haben

---

1) An anderer Stelle [S. 55], wo von der Schrift Foncenex' über Mechanik die Rede ist, heißt es, daß Lagrange sie veranlaßt, ja vielleicht verfaßt hat. Diese von Genocchi und andern Geometern angenommene Meinung geht auf Delambre zurück. Der berühmte Biograph von Lagrange drückt sich so aus: „Il [Lagrange] fournissait à Foncenex la partie analytique de ses memoires en lui laissant le soin de développer les raisonnemens sur lesquels portaient ses formules. En effet, on remarque déjà dans ces mémoires [von Foncenex] cette marche purement analytique, qui depuis a fait le caractère des grandes productions de Lagrange. Il avait trouvé une nouvelle théorie du levier." — *Notices sur la vie et les ouvrages de M. Comte Lagrange;* Mém. Inst. de France, classe Math. et Phys., t. XIII, p. XXXV [1812].

2) Vgl. D'Alembert: „*Sur les principes de la Mécanique*"; Mém. de l'Ac. des Sciences de Paris [1769]. — Laplace: „*Recherches sur l'intégration des équations différentielles*"; Mém. Ac. Sciences de Paris (Savants étrangers), t. VII [1773]. — Oeuvres de Laplace, t. VIII, p. 106—07.

3) Zu diesem Ergebnis kann man direkt durch Integration von (2) gelangen, oder was dasselbe ist, durch Integration von (1)

wir drei mögliche Gesetze für die Zusammensetzung der Kräfte und folglich drei verschiedene Typen von Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln eines Dreiecks. Diese Ergebnisse können in der folgenden Tabelle zusammengestellt werden, wo mit k eine reelle positive Zahl bezeichnet ist.

Wert von c	Form von $\varphi(x)$	Trigonometr. Beziehungen	Art der Ebene
$c = k$	$e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}} = 2\,Ch\,\frac{x}{k}$	$Ch\,\frac{b}{k} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$	hyperbolisch
$c = ik$	$e^{\frac{ix}{k}} + e^{-\frac{ix}{k}} = 2\cos\frac{x}{k}$	$\cos\frac{b}{k} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$	elliptisch
$c = \infty$	$e^{\frac{x}{\infty}} + e^{-\frac{x}{\infty}} = 2$	$1 = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$	parabolisch

Folgerung: Das Gesetz der Zusammensetzung von Kräften senkrecht zu einer Geraden kennzeichnet also in einem gewissen Sinn die Beziehungen, die zwischen den Seiten und den Winkeln eines Dreiecks gelten, und deshalb die geometrischen Eigenschaften der Ebene und des Raumes.

Diese Tatsache wurde angegeben und klargelegt von A. Genocchi [1817—1889] in einigen sehr wichtigen Schriften [1]), auf die wir den Leser verweisen wegen aller historischen und bibliographischen Angaben, die den Gegenstand betreffen.

---

in § 6. Man sehe darüber nach die elementare von Cauchy gebrauchte Methode zur Bestimmung der Funktion $f(a)$, die (1) genügt: *Oeuvres de Cauchy*, II. série, t. III, p. 106—13.

1) Die eine davon ist die auf S. 224 genannte Schrift, die andere, die von 1869 stammt, hat den Titel: „*Dei primi principi della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide*"; Annali della Società italiana delle Scienze (3), t. II, p. 153—89.

Anhang III.

Die nichteuklidische Parallelenkonstruktion.

1. Die nichteuklidische Parallelenkonstruktion beruht auf der Zuordnung des rechtwinkligen Dreiecks und des dreirechtwinkligen Vierecks; in der Tat ergeben sich, wenn diese Zuordnung bekannt ist, ganz unmittelbar eine Reihe von verschiedenen Konstruktionen.[1])

Um diese Zuordnung kurz ausdrücken zu können, führen wir folgende Bezeichnungen ein: c sei die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, a und b die Katheten, λ und μ die ihnen gegenüberliegenden Winkel. Ferner werden mit griechischen Buchstaben ($\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$) die zu den mit lateinischen Buchstaben benannten Strecken (a, b, c, l, m) als Loten gehörigen Parallelwinkel (vgl. oben S. 90) bezeichnet, und zwei Strecken, für welche die zugehörigen Parallelwinkel komplementär sind, durch Akzente unterschieden; es wird also z. B.

$$\Pi(a') = \frac{\pi}{2} - \Pi(a), \qquad \Pi(l') = \frac{\pi}{2} - \Pi(l)$$

u. s. w.

Dann besteht der Satz: Zu jedem rechtwinkligen Dreieck (a, b, c, λ, μ) gehört ein dreirechtwinkliges Viereck mit dem vierten (spitzen) Winkel β, dessen Seiten, vom Scheitel des spitzen Winkels an, der Reihe nach sind c, m', a, l.

Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung.

1) Vgl. S. 256 in Engels Werk (zitiert auf S. 86).

Hieraus ergibt sich z. B. die folgende Konstruktion (Fig. 74): Um zu BC die Parallele durch A zu legen, fälle man das Lot AB auf BC, errichte auf AB in A die Senkrechte, fälle darauf von C das Lot CD und bringe DC mit dem Kreis zum Schnitt, dessen Mittelpunkt A, dessen Halbmesser

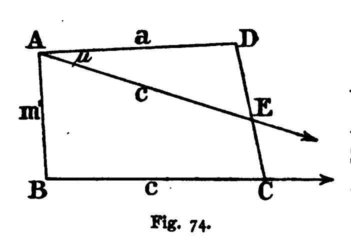


Fig. 74.

$$AE = BC = c$$

ist. AE ist dann parallel zu BC, weil

$$\sphericalangle EAD = \mu$$

ist, also

$$\sphericalangle BAE = \frac{\pi}{2} - \mu = \Pi(m').$$

Um trigonometrische Formeln beim Beweis dieser Konstruktion zu umgehen, kann man z. B. direkt zu beweisen suchen, daß die Gerade AE in ihrer Verlängerung (einfach wegen der Gleichheit von BC und AE) die Verlängerung von BC nicht schneidet, aber auch mit ihr kein gemeinsames Lot hat, daß sie also parallel zu ihr sein muß. Dieser Beweis ist bisher noch nicht geführt worden.

Man kann weiter die Richtigkeit der Konstruktion durch den Satz beweisen, daß im Paralleldreikant die Summe der Kantenwinkel (oder Keilwinkel) zwei Rechte, daher im Parallel-n-Kant $(2n - 4)$ Rechte beträgt. (Vgl. oben § 48, b.)[1])

Endlich ist es auch möglich, ohne die Geometrie des nichteuklidischen Raumes heranzuziehen, die in dem obigen Satz ausgesprochene Zuordnung — die bei der hier angegebenen Parallelenkonstruktion, wie schon Fig. 74 zeigt, nur zum Teil gebraucht wird — nachzuweisen.

1) Vgl. Lobatschefskij (Übers. von Engel) S. 171.

2. Direkter Beweis der Konstruktion mit Hilfe von Parallelkanten.

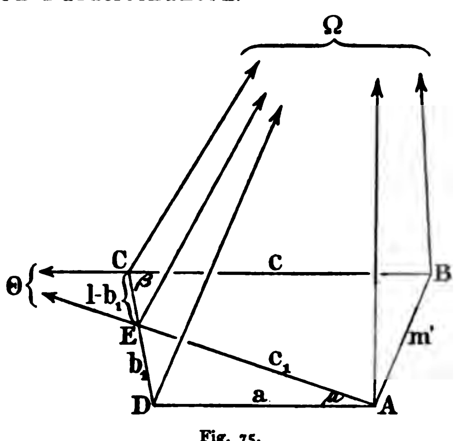


Fig. 75.

Wir errichten auf der Ebene des dreirechtwinkligen Vierecks $ABCD$, dessen Bestimmungsstücke wir so bezeichnen:

$$\sphericalangle BCD = \beta, \quad AD = a, \quad DC = l, \quad CB = c, \quad BA = m',$$

in A das Lot $A\Omega$, und ziehen zu ihm durch B, C und D die Parallelen $B\Omega$, $C\Omega$, $D\Omega$.

Sodann ziehen wir durch A die Parallele $A\theta$ zu BC, welche CD in E trifft ($ED = b_1$) und durch $A\Omega$ und E legen wir eine Ebene, die $CD\Omega$ in $E\Omega$ trifft. Der Definition nach ist dann

$$\sphericalangle EAD = \frac{\pi}{2} - \Pi(m') = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = \mu.$$

Weiter steht die Ebene ΩAB senkrecht auf a und die Ebene ΩDA senkrecht auf l, weil ΩA und AB zu a, ΩD und a zu l senkrecht sind.

Ferner ist

$$\sphericalangle AB\Omega = \sphericalangle \theta AB = \frac{\pi}{2} - \mu.$$

Die beiden Dreikante $C(DB\Omega)$ und $E(DA\Omega)$ haben, das eine längs der Kante $C\Omega$ (weil im Parallelvierkant $\Omega(ABCD)$ die Kantenwinkel längs ΩA, ΩB und ΩD rechtwinklig sind, und die Summe der vier Kantenwinkel vier Rechten gleich ist), das andere längs EA einen rechten Kantenwinkel; außerdem ist der Kantenwinkel an CD identisch mit dem an ED (also gleich α).

Wir weisen auch noch die Gleichheit des dritten Kantenwinkels nach. Dieser dritte Kantenwinkel ist im ersten Dreikant gleich dem Winkel der Ebenen $ABCD$ und $CB\Omega$, also gleich $\frac{1}{2}\pi - \mu = \sphericalangle AB\Omega$.

Im zweiten Dreikant ist der Kantenwinkel an $E\Omega$ aber leicht zu berechnen, weil er auch dem Paralleldreikant $\Omega(ADE)$ angehört, von dem der Kantenwinkel an ΩD, wie wir schon wissen, ein rechter ist, und der an ΩA gleich μ; also ist der an $E\Omega$ gleich $\frac{1}{2}\pi - \mu$.

Demnach ist das Dreikant $C(DB\Omega)$ kongruent dem Dreikant $E(D\Omega A)$.

Daher ist

$$\sphericalangle BC\Omega = \sphericalangle \Omega EA,$$

und die zu diesen Parallelwinkeln gehörigen Lote

$$c = BC \quad \text{und} \quad c_1 = AE$$

sind also einander gleich, was zu beweisen war.

Ferner folgt noch

$$\sphericalangle DEA = \sphericalangle DC\Omega,$$

d. h., der im Dreieck der Seite a gegenüberliegende Winkel (λ_1) ist

$$\lambda_1 = \Pi(l) = \lambda$$

und endlich

$$\sphericalangle DCB = \sphericalangle DE\Omega,$$

d. h.

$$\beta = \Pi(b_1), \quad \text{oder} \quad b_1 = b.$$

Hiermit ist die im obigen Satz ausgesprochene Zuordnung vollständig nachgewiesen.[1])

---

1) Bonola, Ist. Lomb. Rendiconti, Ser. II, vol. 37 (1904),

3. Nachweis der Zuordnung in der Ebene. Verlängert man im rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 76)

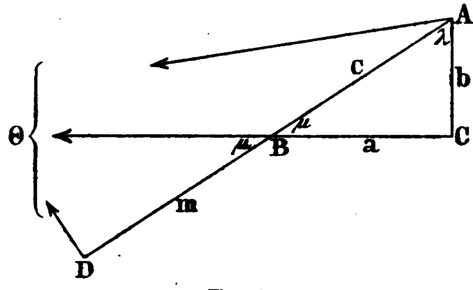


Fig. 76.

die Hypotenuse $AB = c$ bis zum Fußpunkt D des zur Verlängerung von BC parallelen Lotes, so ist nach der oben eingeführten Bezeichnung

$$BD = m.$$

Ziehen wir noch zu $D\theta$ und $CB\theta$ die Parallele durch A, dann ist:

$$\sphericalangle\, CAD = \beta (= \Pi(b))$$

und auch gleich

$$\lambda + \sphericalangle\, DA\theta = \lambda + \Pi(c+m).$$

Wir erhalten also die erste der sechs folgenden Beziehungen, von denen die dritte und fünfte durch ähnliche Konstruktionen gewonnen sind, die zweite, vierte und sechste aber jedesmal aus der vorhergehenden sich ergibt, wenn man die beiden Katheten a und b vertauscht und entsprechend die Winkel λ und μ. Auf diese Weise kommt die Tabelle[1]):

S. 255—58. — Zuvor ist der Satz schon ebenfalls rein geometrisch bewiesen von F. Engel, Bulletin de la Société Physico-Mathématique, Kasan (2) VI (1896) und in den Berichten der K. S. G. d. W., Math.-Phys. Klasse 50 (Leipzig 1898), S. 181—87.

1) Vgl. Lobatschefskij (Übers. von Engel), S. 15—16.

$$\lambda + \Pi(c+m) = \beta, \quad \mu + \Pi(c+l) = \alpha;$$
$$\lambda + \beta = \Pi(c-m), \quad \mu + \alpha = \Pi(c-l);$$
$$\Pi(b+l) + \Pi(m-a) = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \Pi(m+a) + \Pi(l-b) = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Ähnliche Beziehungen können aber auch beim dreirechtwinkligen Viereck durch ähnliche Konstruktionen abgeleitet werden, indem man gewisse Seiten verlängert und auf ihnen die Senkrechten errichtet, die zu bestimmten andern Seiten parallel sind, usw. Benennen wir in dem Viereck den spitzen Winkel mit β_1 und die Seiten, von ihm ausgezählt, mit c_1, m_1', a_1, l_1, so kommt die Tabelle:

$$\lambda_1 + \Pi(c_1 + m_1) = \beta_1, \quad \gamma_1 + \Pi(l_1 + a_1') = \beta_1;$$
$$\lambda_1 + \beta_1 = \Pi(c_1 - m_1), \quad \gamma_1 + \beta_1 = \Pi(l_1 - a_1');$$
$$\Pi(l_1 + b_1) + \Pi(m_1 - a_1) = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \Pi(c_1 + b_1) + \Pi(a_1' - m_1') = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Die zweite, vierte und sechste Formel werden durch gleichzeitige Vertauschung von c_1 und m_1' mit l_1 und a_1 gewonnen (entsprechend wie beim rechtwinkligen Dreieck).

Wir denken uns jetzt ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c und dem einen anliegenden Winkel μ konstruiert, dessen übrige Stücke mit a, b, λ nach der Vorschrift bezeichnet werden; desgleichen sei ein dreirechtwinkliges Viereck konstruiert aus der dem spitzen Winkel anliegenden Seite c und der darauffolgenden m'; die übrigen Stücke seien a_1, l_1 und β_1. Dann zeigt der Vergleich der ersten und dritten Dreiecksformel mit der ersten und dritten Vierecksformel, daß auch

$$\beta_1 = \beta, \quad \lambda_1 = \lambda$$

ist. Die fünften Formeln der beiden Tabellen ergeben dann

$$a_1 = a.$$

Hiermit ist der obige Satz ebenfalls bewiesen.

Aus der Formeltabelle kann dann des Weiteren gezeigt werden, daß zu einem rechtwinkligen Dreieck mit den Stücken $(a, b, c; \lambda, \mu)$ ein zweites gehört mit den Stücken

$$a_1 = a, \quad b_1 = l', \quad c_1 = m, \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \mu_1 = \gamma',$$

ein Umstand, der für weitere Konstruktionen sehr wichtig ist. Doch wollen wir darauf nicht eingehen.

Die hier angegebenen Konstruktionen beruhen sämtlich auf metrischer Grundlage, man kann sich aber auch des Umstandes bedienen, daß die metrischen Begriffe Orthogonalität und Parallelismus eine projektive Bedeutung haben (§ 79) und daß die projektive Geometrie vom Parallelenpostulat unabhängig ist (§ 80).

Wie wird man hiernach z. B. durch einen Punkt A die beiden Parallelen zu einer gegebenen Geraden finden?

Sind auf g die Punkte $P_1 P_2 P_3$ und $P_1' P_2' P_3'$ gegeben, so daß die mit den akzentuierten Buchstaben bezeichneten Punkte alle auf derselben Seite von den entsprechenden nicht akzentuierten liegen und daß

$$P_1 P_1' = P_2 P_2' = P_3 P_3'$$

ist, so verbinde man A mit P_1, P_2 und P_3 und bezeichne die drei Geraden mit s_1, s_2, s_3, ebenso A mit P_1', P_2', P_3' durch die drei Geraden $s_1' s_2' s_3'$. Durch die drei Strahlenpaare ist dann eine projektive Zuordnung des Strahlenbüschels (s) durch A mit sich selbst gegeben, deren Doppelelemente offenbar die beiden gesuchten Parallelen sind. Diese Doppelelemente können nach den Methoden der projektiven Geometrie konstruiert werden.[1])

---

1) Vgl. z. B. die deutsche Übersetzung von Enriques, Projektive Geometrie (zitiert oben S. 166, Anm. 3), § 73, S. 256.

Der absolute Kegelschnitt ist dann durch fünf Punkte, d. h. durch fünf Paare von Parallelen bestimmt, und somit verwandeln sich dann alle weiteren metrischen Aufgaben in projektive.

Stellt man (vgl. oben § 84) die Lobatschefskij-Bolyaische Geometrie so dar (z. B. innerhalb der euklidischen Ebene), daß das Bild des absoluten Kegelschnitts ein gegebener, im Endlichen gelegener Kegelschnitt wird, so lassen sich die Aufgaben der nichteuklidischen Ebene in dieser „Übersetzung" zum Teil sehr schön und einfach lösen, wie dies M. Großmann gezeigt hat.[1]) Man darf aber nicht vergessen, daß diese Einfachheit wieder eingebüßt wird, wenn wir von der „Übersetzung" wieder zum „Urtext" übergehen.

In der nichteuklidischen Ebene ist ja der Fundamentalkegelschnitt unzugänglich und seine Punkte nur durch Büschel von Parallelen gegeben; die Punkte außerhalb des Fundamentalkegelschnitts, die in der „Übersetzung" ebenfalls erreichbar sind, sind im „Urtext" erst recht unzugänglich; sie sind hier Büschel von Geraden, welche sich nicht in einem Punkt treffen, sondern eben durch den (idealen) Pol einer gewissen Geraden i. b. auf den Fundamentalkegelschnitt gehen. — Will man alle Konstruktionen wirklich rückwärts übertragen, so treten oft ähnliche Schwierigkeiten auf, wie bei der Übersetzung in eine fremde Sprache, wo man öfters ein kurzes Adjektivum durch einen langen Nebensatz umschreiben muß.

---

1) M. Großmann, Die fundamentalen Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie. — Programm der Thurgauischen Kantonschule. Frauenfeld 1904.

Namenregister.

(Die Nummern bedeuten die Seitenzahlen.)